Hermann Weyl

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Scientia Nova

Oldenbourg

Weyl · Philosophie der Mathematik

Scientia Nova

Herausgegeben von
Rainer Hegselmann, Gebhard Kirchgässner,
Hans Lenk, Siegwart Lindenberg,
Julian Nida-Rümelin, Werner Raub,
Thomas Voss

Bisher erschienen u. a.:

Robert Axelrod, Die Evolution der Kooperation
Norman Braun, Rationalität und Drogenproblematik
James S. Coleman, Grundlagen der Sozialtheorie
Morton D. Davis, Spieltheorie für Nichtmathematiker
Erklären und Verstehen in der Wissenschaft
Bruno de Finetti, Wahrscheinlichkeitstheorie
Robert Frank, Strategie der Emotionen
Peter Kappelhoff, Soziale Tauschsysteme
Hans Lenk, Das Denken und sein Gehalt
Moral und Interesse
Nagel/Newman, Der Gödelsche Beweis
John v. Neumann, Die Rechenmaschine und das Gehirn
Julian Nida-Rümelin, Kritik des Konsequentialismus
Rational-Choice-Theorie in den Sozialwissenschaften
Erwin Schrödinger, Was ist ein Naturgesetz?
Rudolf Schüßler, Kooperation unter Egoisten
Geo Siegwart, Vorfragen zur Wahrheit
Volker Stocké, Framing und Rationalität
Hermann Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Von Hermann Weyl

8. Auflage

R. Oldenbourg Verlag München 2009

Die 8. Auflage von „Hermann Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“ ist ein unveränderter Nachdruck der 3., wesentlich erweiterten Auflage 1966 dieses erstmals 1928 im Rahmen des „Handbuchs der Philosophie“ erschienenen Werkes. Die 3. Auflage ist aus einer amerikanischen Ausgabe von 1949 entstanden, die im Hauptteil den Handbuchartikel ergänzt und verbessert in englischer Sprache enthielt und durch die folgenden neuen Anhänge erweitert war:

A Die Struktur der Mathematik
B Ars combinatoria
C Quantenphysik und Kausalität
D Die chemische Valenz und die Hierarchie der Strukturen
E Physik und Biologie
F Die Haupteigenschaften der physischen Welt; Gestalt und Entwicklung

Sie wurde gegenüber der englischen Ausgabe verbessert und die Literaturangaben auf den neuesten Stand gebracht. Die Überarbeitung und Übersetzung der amerikanischen Texte besorgte Dr. Gottlob Kirschmer.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d.nb.de abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Internet: oldenbourg.de

Umschlaggestaltung: Dieter Vollendorf
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier (chlorfrei gebleicht).
Gesamtherstellung: AZ Druck- und Datentechnik, Kempten

ISBN 978-3-486-58947-4

Aus dem Vorwort des Verfassers zur amerikanischen Ausgabe von 1949

Ein Naturwissenschaftler, der über Philosophie schreibt, sieht sich Gewissenskonflikten ausgesetzt, von denen er sich selten ganz und unbeschadet freimachen wird; der offene Horizont und die Tiefe der philosophischen Gedanken lassen sich nicht leicht mit der objektiven Klarheit und Bestimmtheit in Einklang bringen, für die er in der Schule der Naturwissenschaft ausgebildet worden ist.

Der Hauptteil dieses Buches ist mit meinem Artikel „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“ im „Handbuch der Philosophie“ (Verlag R. Oldenbourg 1928) identisch. Bei seiner Abfassung war ich an den Generalplan des *Handbuchs* gebunden, wie er von den Herausgebern umrissen wurde, die sowohl auf die systematischen als auch die historischen Aspekte der Philosophie gleiches Gewicht legten. Dann war ich, freilich weniger bewußt, einmal durch die deutsche Tradition in Literatur und Philosophie, in der ich aufgewachsen war, und zum anderen durch die begrenzten Problemkreise, die sich mir in meiner eigenen geistigen Entwicklung erschlossen hatten, gebunden.

Unter der Überschrift „Naturwissenschaft“ beschäftigt sich mein Handbuchartikel fast ausschließlich mit Physik. Sie ist die einzige naturwissenschaftliche Disziplin, mit der ich durch meine eigene Arbeit vertraut bin. Die Gründe, die Biologie mit ein paar allgemeinen Bemerkungen abzutun, waren, daß der mir zur Verfügung stehende Raum mehr als überschritten war, und daß ich auf den Artikel „Metaphysik der Natur“ des Biologen und Philosophen Hans Driesch verweisen konnte.

Rund zwanzig Jahre sind seitdem vergangen, eine lange und ereignisreiche Zeit in der Geschichte der Naturwissenschaften. Wenn nun (nicht auf meine eigene Initiative) der Plan einer englischen Übersetzung des Buches aufgetaucht ist, so gab ich meine Einwilligung dazu, obgleich ich mir der zufälligen Umstände seiner Entstehung und der Altersrunzeln in seinem Gesicht voll bewußt war; denn mir schien, als sei das Aufzeigen der gegenseitigen Durchdringung von naturwissenschaftlichem und philosophischem Gedankengut heute so zeitgemäß wie je. Freilich konnten die Ereignisse der beiden vergangenen Jahrzehnte nicht einfach übergangen werden. Aus mehr als einem Grund schied die Möglichkeit, das Buch in englisch neu zu schreiben, aus; denn wie konnte ich hoffen, diese Hingabe und den Geist jener Zeit in meinem Leben, als ich es zum ersten Male schrieb, noch einmal einzufangen — um nach unerläßlichen literarischen Vorarbeiten das Manuskript in ein paar Wochen hinzuhauen.

Trotz zahlreicher Änderungen im kleinen, wobei ich besonders die Abschnitte 13 bis 15 und den Schlußabschnitt 23 erwähne, ist der alte Text in seiner Substanz erhalten geblieben, so daß er der Auffassung eines philosophisch eingestellten Mathematikers zu einer Zeit entspricht, als die Relativitätstheorie ihren Abschluß erreicht hatte und die neue Quantenmechanik soeben im Entstehen begriffen war. Die Literaturhinweise sind demgegenüber auf den neuesten Stand gebracht und sechs Anhänge angefügt worden, für die die Entwicklung der Mathematik und der Physik, aber auch der Biologie in den dazwischenliegenden Jahren den Stoff geliefert haben. Diese Anordnung, die vom Standpunkt der ästhetischen Einheitlichkeit aus angreifbar ist, hat einen gewissen Reiz. Die Anhänge sind ihrer Art nach mehr systematisch-wissenschaftlich und weniger historisch-philosophisch als der Hauptteil. Mit den Jahren bin ich mit den metaphysischen Folgerungen der Naturwissenschaft zurückhaltender geworden: „As we grow older, the world becomes stranger, the pattern more complicated". Und doch würde die Naturwissenschaft ohne einen tragenden transzendentalen Glauben an Wahrheit und Wirklichkeit und ohne das ständige Wechselspiel zwischen Tatsachen und Konstruktionen einerseits und der Darstellung der Gedanken andererseits umkommen.

Eine der Hauptaufgaben dieses Buches sollte sein, als kritischer Führer durch die in den Literaturhinweisen zitierten Werke zu dienen.

Abschnitte historischen Inhalts oder mit Ergänzungen, die nicht unbedingt in den Hauptgang der Entwicklung des Buches gehören, werden in Kleindruck wiedergegeben.

Princeton, New Jersey
Dezember 1947 HERMANN WEYL

Vorwort des Herausgebers

Hermann Weyls „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“ ist erstmals 1928 als Beitrag zu dem von Alfred Baeumler und Manfred Schröter herausgegebenen „Handbuch der Philosophie“ veröffentlicht worden. Auch innerhalb dieses von hervorragenden Denkern verfaßten Sammelwerkes erregte die Arbeit Weyls besonderes Aufsehen und fand als grundlegendes Werk im In- und Ausland allgemeine Anerkennung.

Für die 1949 bei der Princeton University Press erschienene Ausgabe in englischer Sprache verfaßte Hermann Weyl nicht nur einen umfangreichen Anhang, sondern er verbesserte und ergänzte auch den ursprünglichen Text an vielen Stellen.

Bald nach dem Erscheinen der amerikanischen Ausgabe ist beim Verlag der Plan entstanden, eine deutsche Ausgabe des erweiterten Handbuchbeitrages zu unternehmen. Dem Plan zufolge wurden die Anhänge der amerikanischen Ausgabe übersetzt und von Hermann Weyl noch selbst durchgesehen. Verschiedene Umstände und vor allem der Tod des Autors im Jahre 1955 haben bewirkt, daß die Ausgabe nicht zustande kam.

Das unvermindert hohe Ansehen, dessen sich das Werk Weyls gerade bei den führenden Mathematikern erfreute, und das Interesse des Verlages an Werken der wissenschaftlichen Grundlagenforschung haben dazu geführt, daß die sehr mühevolle Kleinarbeit, die noch notwendig war, um eine den letzten Intentionen Hermann Weyls entsprechende neue Ausgabe zu ermöglichen, noch geleistet wurde. Infolge des Fortschrittes und der Erfolge in allen Zweigen der Mathematik und Naturwissenschaft während des letzten Jahrzehnts ist die Notwendigkeit der gegenseitigen Durchdringung historisch-philosophischer Gedanken einerseits und systematisch-wissenschaftlicher Tatsachen und Methoden andererseits dringlicher geworden denn je. In dieser Beziehung ist das Werk von Hermann Weyl an keiner Stelle überholt.

München, im Juli 1966 GOTTLOB KIRSCHMER

Inhaltsverzeichnis

Anhang

Literatur

über Ausgaben und Übersetzungen, die für Zitate verwendet worden sind, in Ergänzung zu Angaben im Text.

R. Descartes, Oeuvres, ed. Victor Cousin, Paris 1824. Die französische Fassung der „Meditationes de prima philosophia — Méditations (métaphysiques) touchant la première philosophie", und der „Principia philosophiae = Les principes de la philosophie" ist in Band I bzw. III enthalten.

Die monumentale Schweizer Ausgabe von *L. Eulers* „Opera omnia" ist noch lange nicht vollständig und enthält nicht die beiden hier zitierten Werke („Theoria motus" und „Anleitung zur Naturlehre").

G. Galilei, „Opere", Edizione nazionale, Florenz 1890—1909, Neudruck 1929 —. „Dialogo" = „Dialogo sopra i dui massimi sistemi del mondo" steht in Band VII; „Discorsi" = „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze" in Band VIII; „Il saggiatore" in Band VI.

David Humes „Treatise of Human Nature" und *John Lockes* „Enquiry concerning Human Understanding" werden durch ‚Kapitel und Vers' unabhängig von einer besonderen Ausgabe ausgewiesen.

Immanuel Kant, „Kritik der reinen Vernunft", 1. Aufl. 1781, 2. Aufl. 1787.

G. W. Leibniz, „Mathematische Schriften", ed. Gerhardt, Berlin 1849 seq.; „Philosophische Schriften", ed. Gerhardt, Berlin 1875 seq.

Die Briefe von *Leibniz* an *S. Clarke* bilden einen Teil der Kontroverse Leibniz—Clarke; sie stehen in *G. W. Leibniz*, „Philosophische Schriften", ed. Gerhardt, VII, S. 352—440.

Sir Isaac Newton, „Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World", ed. F. Cajori, Berkeley, Kalifornien 1934, Neudruck 1946. (Original in Latein: „Philosophiae naturalis principia mathematica", 1. Ausg. London 1687, 2. Ausg. 1713, 3. Ausg. 1726; die oben angegebene engl. Übersetzung beruht auf einer alten Übersetzung 1729 von Andrew Motte nach der dritten Ausgabe.)

Newtons „Opticks" ist englisch geschrieben worden. Die 4. Ausgabe (London 1730) ist mit einer Einleitung von E. T. Whittaker versehen nachgedruckt worden: London 1931.

ERSTER TEIL: MATHEMATIK

Einführung

Über einige wichtige philosophische Resultate und Gesichtspunkte, welche sich hauptsächlich aus der Arbeit der Mathematik und Naturwissenschaft selbst ergeben haben, soll in den beiden Teilen dieses Artikels berichtet werden. Auf die Verknüpfung mit den großen Philosophemen der Vergangenheit werde ich hinweisen, wo sie mir fühlbar geworden ist. Die belegenden Beispiele werde ich so einfach wie möglich wählen; prinzipiell muß aber daran festgehalten werden, daß die Beschäftigung mit der Philosophie der Wissenschaften die Kenntnis der Wissenschaften selber voraussetzt.

Der hier befolgte Gang in der Darstellung der Grundlagen der *Mathematik* wird von der Oberfläche in die Tiefe führen, das mehr Formale der inhaltlichen Problematik des Unendlichen vorausgehen lassen. Die sorgfältige formale Vorbereitung und die strenge Erfassung dieser natürlich von je her lebendigen und zum Ausdruck gelangten Problematik ist erst ein Werk der jüngsten Zeit. Von den Heroen der Philosophie besaß vor allen *Leibniz* den Blick für das Wesen des Mathematischen; Mathematik ist als organischer und bedeutsamer Bestandteil seinem philosophischen Systeme eingefügt.

I. Mathematische Logik. Axiomatik

Den Griechen verdanken wir die Erkenntnis, daß die Struktur des Raumes, die sich in den Beziehungen der räumlichen Gebilde und ihren gesetzmäßigen Abhängigkeiten voneinander kundtut, etwas vollkommen Rationales ist. Anders als etwa bei einem wirklichen Einzelding, wo wir immer von neuem aus der Anschauung schöpfen müssen, um immer neue, nur in deskriptiven Begriffen vagen Umfangs beschreibbare Merkmale an den Tag zu heben, läßt sich die Raumstruktur mit Hilfe weniger exakter Begriffe und in wenigen Aussagen, den Axiomen, erschöpfend kennzeichnen, derart, daß alle geometrischen Begriffe sich mit Hilfe jener Grundbegriffe definieren lassen, jede wahre geometrische Aussage sich als eine logische Folge der Axiome ergibt. Dadurch wurde die Geometrie zum Vorbild *deduktiver Wissenschaft.* Und infolge dieses ihres Charakters hat die Mathematik ein hervorragendes Interesse an den Methoden, mit Hilfe deren Begriffe auf Grund anderer *definiert,* und mit Hilfe deren Urteile aus andern Urteilen *gefolgert* werden. (Auch die Aristotelische Logik war im wesentlichen abstrahiert aus der Mathematik.) Ja, die endgültige Begründung der Mathematik selbst scheint nicht möglich, ohne daß darüber vollständige Rechenschaft abgelegt wird.

1. Relationen und ihre Verknüpfung. Struktur der Urteile

In der euklidischen Geometrie haben wir es zu tun mit drei Gegenstandskategorien, Punkt, Gerade, Ebene, die nicht definiert, sondern als anschaulich aufgewiesen angenommen werden, und den Grundbeziehungen „liegt auf“ (Punkt liegt auf Gerader, Gerade liegt in Ebene, Punkt liegt in Ebene), „zwischen“ (ein Punkt z liegt zwischen den Punkten x und y) und „kongruent“ (Kongruenz von Strecken und Winkeln). Analog haben wir im Gebiete der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... als einzige Grundrelation, mit Hilfe deren alle andern zu definieren sind, diejenige, welche zwischen einer Zahl n und der auf sie folgenden n' besteht. Ein gutes Beispiel zur Relationslehre liefern ferner die Verwandtschaftsbeziehungen zwischen Menschen. Hier liegen zwei Grundkategorien vor: Person männlichen, Person weiblichen Geschlechts, als Grundrelationen treten auf Kindschaft (x ist Kind von y) und Ehe (x ist verheiratet mit y). Das Urteilsschema einer *Relation*, z. B. x folgt auf y, enthält eine oder mehrere Leerstellen $x, y, \ldots$, deren jede auf eine bestimmte Gegenstandskategorie bezogen ist. Aus dem Urteilsschema entsteht ein bestimmtes Urteil, z. B. 5 folgt auf 4, wenn jede Leerstelle durch einen bestimmten Gegenstand der zugehörigen Kategorie ausgefüllt wird. Die Sprache zeichnet den Bau eines derartigen Relationsurteils nicht richtig nach; es gibt da nicht Subjekt, Kopula und Prädikat, sondern eine Relation mit zwei gleichberechtigten Leerstellen, die durch Gegenstände ausgefüllt sind. Man könnte, um sich frei zu machen von den zufälligen grammatischen Formen der Sprache, die Urteilsschemata von Relationen repräsentieren durch Holzplatten mit einzelnen, den Leerstellen korrespondierenden Pflöcken, die Gegenstände durch kleine, mit einem Loch versehene Kugeln, welche auf diese Pflöcke gesteckt werden können. Das sind an sich ebenso brauchbare Symbole wie die Worte. — Zwei Sätze wie „5 folgt auf 4" und „4 geht 5 voran" geben einer und derselben Beziehung zwischen 4 und 5 Ausdruck; es ist unberechtigt, da von zwei zueinander inversen Beziehungen zu sprechen. Freilich haben die Leerstellen im Urteilsschema jede eine spezifische Stelle; und es ist eine besondere Eigentümlichkeit (Kommutativität), wenn die Relation $R(xy)$ [z. B.: x ist Bruder von y] gleichbedeutend (oder gleichen Geltungsumfanges) ist mit $R(yx)$. Die *Eigenschaften* werden wir ebenso mit zu den Relationen zu rechnen haben, wie wir die 1 mit unter die Anzahlen aufnehmen; ihr Urteilsschema besitzt nur eine Leerstelle.

Im § 47 seines fünften Schreibens an *Clarke* spricht *Leibniz* („Hauptschriften", herausg. v. *Cassirer*, Philos. Bibl. Bd. 107/108; I, S. 185) von einem „Verhältnis zwischen L und M, ohne dabei zu erwägen, welches Glied das vorhergehende oder folgende, das Subjekt oder Objekt ist". „Man kann nicht sagen, daß alle beide, L und M zusammengenommen, das Subjekt für ein solches Accidens bilden, denn wir hätten dann ein

Accidens in zwei Subjekten, das also gleichsam mit einem Fuß im einen, mit dem andern im anderen Subjekte stünde, was mit dem Begriffe des Accidens unvereinbar ist. Man muß demnach sagen, daß die Beziehung ... allerdings außerhalb der Subjekte ist, daß sie aber, da sie weder Substanz noch Accidens ist, etwas rein Ideelles sein muß, dessen Betrachtung jedoch darum nicht minder fruchtbar ist." Die (ausgesprochene oder stillschweigende) Voraussetzung, daß jede Relation auf Eigenschaften fundiert sein müsse, hat in der Philosophie viel Unheil angerichtet. So ist freilich das Urteil, daß eine Rose verschiedenfarbig von einer zweiten ist, darin gegründet, daß die eine rot, die andere gelb ist. Aber die Beziehung „der Punkt A liegt links von B" ist nicht auf einer qualitativ zu kennzeichnenden Lage von A für sich und B für sich fundiert. Das gleiche gilt für Verwandtschaftsbeziehungen. Die bekämpfte Meinung stammt offenbar aus dem Reiche der Empfindungsdaten, die freilich nur Beschaffenheit, nicht Relation geben können. Darum bezeichnet *Leibniz* an der angeführten Stelle die Relation als etwas rein Ideales. Der mehr als zweistelligen Beziehung geschieht in der logisch-philosophischen Literatur kaum jemals Erwähnung. — Die Einführung von Urteilsschemen mit Leerstellen ist ein wichtiger Fortschritt der mathematischen über die traditionelle Logik; sie werden in Analogie zu den mathematischen Funktionen, die eine Zahl liefern, wenn man ihre Argumente oder Leerstellen durch Zahlen ausfüllt, häufig auch „Urteilsfunktionen" genannt. — In den Axiomen der Arithmetik spielen *Operationen* neben den Relationen eine Rolle, z. B. die Operation des Addierens, welche aus zwei Zahlen a, b eine dritte $a + b$ erzeugt. Wir können diese Operation aber durch die Relation $a + b = c$ zwischen drei Zahlen a, b, c ersetzen; sie ist in bezug auf das Argument c „eindeutig", d. h. zu irgend zwei Zahlen a, b gibt es stets eine und nur eine Zahl c, welche zu ihnen in der Beziehung $a + b = c$ steht. Hierdurch ordnen wir die genetische Konstruktion dem ruhenden Sein der Relationen unter; später werden wir freilich gerade umgekehrt alle Relationen durch konstruktive Prozesse ersetzen.

Folgendes sind die Prinzipien der *Kombination von Beziehungen.*

1. In einem Relationsschema mit mehreren Leerstellen kann man einzelne dieser Leerstellen miteinander *„zur Deckung bringen"*, identifizieren. — Aus dem Schema $N(xy)$: x ist Neffe von y, entsteht so z. B. $N(xx)$: x ist Neffe von sich selber.

2. *Negation.* Zeichen: —. Aus $N(xy)$ entsteht $\overline{N}(xy)$: x ist nicht Neffe von y.
3. *und.* Zeichen: &. Aus $N(xy)$ und $V(xy)$: x ist Vater von y, entsteht z. B. die Relation mit drei Leerstellen: $V(xy)$ & $N(yz)$: x ist Vater von y und y Neffe von z. Es ist anzugeben, welche Leerstellen der beiden verknüpften Schemata einander decken. In der Symbolik wird dies durch die Wahl des gleichen Buchstabens für die Leerstellen zumAusdruck gebracht.
4. *oder.* Zeichen: $\vee$. $V(xy) \vee N(yx)$: x ist Vater von y oder y Neffe von x. Die Verknüpfung durch „oder" kann mittels der Negation und der Verknüpfung durch „und" ausgedrückt werden; und umgekehrt[1]).
5. *Ausfüllung* einer Leerstelle durch einen unmittelbar aufgewiesenen Gegenstand der zugehörigen Kategorie. V(ich, x) bedeutet: ich bin Vater von x; dies ist das Schema jener Eigenschaft mit der einen Leerstelle x, die ausschließlich meinen Kindern zukommt.
6. *alle.* Zeichen: Π_x. Z. B. bedeutet $\Pi_x R(xy)$: alle x (der betreffenden Kategorie) stehen zu y in der Beziehung $R(xy)$.
7. *es gibt.* Zeichen: Σ_x. $\Sigma_y R(xy)$ bedeutet: es gibt ein y, zu welchem x in der Beziehung $R(xy)$ steht. Σ_x und Π_x sind durch die Negation in gleicher Weise aufeinander reduzierbar wie $\vee$ und &. Durch ein vorgesetztes Zeichen Π_x, Σ_x mit dem Index x büßt die dahinter stehende Leerstelle x ihre Substitutionsfähigkeit ebenso ein wie durch die Ausfüllung nach 5. Im Dienste der letzten beiden Konstruktionsprinzipien wird den unmittelbar gegebenen Relationen unseres Sachgebietes immer auch die zweistellige Relation der logischen *Identität* $x = y$ hinzuzufügen sein.

---

[1]) *Leibniz* verwendet für „und", „oder" die Zeichen $\cdot$ und $+$. Wir weichen davon ab, um die Kollision mit dem arithmetischen plus und mal zu vermeiden. Ihre formale Analogie dazu tritt in dem von *J. H. Lambert* (Acta erudit. 1765, S. 441) aufgestellten distributiven Gesetz

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

zu Tage. Dem Leibnizschen Brauch schließt sich unsere Verwendung des Produkt- und Summenzeichens Π und Σ in 6. und 7. an.

Beispiele. 1. $(x\mathfrak{g})$ bedeute: der Punkt x liegt auf der Geraden $\mathfrak{g}$. In der ebenen Geometrie besteht die Parallelität zweier Geraden, $\mathfrak{g} \parallel \mathfrak{g}'$, nach Euklid darin, daß sie keinen Punkt (x) gemein haben:

$$\overline{\Sigma}_x \{(x\mathfrak{g}) \,\&\, (x\mathfrak{g}')\}$$

ist also die Definition der Beziehung $\mathfrak{g} \parallel \mathfrak{g}'$.

2. Die Aussage, daß durch zwei verschiedene Punkte (x, y) stets eine Gerade $(\mathfrak{g})$ geht, wäre so zu schreiben:

$$\Pi_y \Pi_x \big((x=y) \vee \Sigma_{\mathfrak{g}} \{(x\mathfrak{g}) \,\&\, (y\mathfrak{g})\}\big).$$

3. Im Gebiete der natürlichen Zahlen heißt p eine Primzahl, wenn es keine von 1 verschiedenen Zahlen x und y gibt, welche zu ihr in der Beziehung $x \cdot y = p$ stehen. Diese Eigenschaft von p, Primzahl zu sein, ist so zu erklären:

$$\Pi_y \Pi_x \big((x=1) \vee (y=1) \vee \overline{x \cdot y = p}\big).$$

Gehen wir von den unmittelbar gegebenen Grundrelationen eines Sachgebietes aus, so gewinnen wir durch beliebige kombinierte Anwendung dieser Prinzipien daraus neue „*abgeleitete*“ Relationen in unbegrenzter Fülle (zu denen natürlich die Grundrelationen auch mit dazu gerechnet werden). Insbesondere werden wir unter ihnen solche mit nur einer Leerstelle antreffen, „abgeleitete Eigenschaften“. Wie eine solche, $E(x)$, als „*differentia specifica*“ im Sinne der Aristotelischen Logik dazu dient, aus dem „*genus proximum*“ derjenigen Gegenstandskategorie, auf welche sich ihre Leerstelle x bezieht, einen neuen Gegenstandsbegriff zu bilden, wird durch das Beispiel 3. der Definition von „Primzahl“ hinreichend deutlich sein. Unter den abgeleiteten Urteilsschemen treten ferner auch solche auf, welche überhaupt keine Leerstelle mehr besitzen, Beispiel 2: das sind die „*einschlägigen Urteile*“ unseres Sachgebietes. Wenn wir von jedem dieser Urteile wüßten, ob es wahr ist oder nicht, so besäßen wir eine vollkommene Kenntnis über die Gegenstände der zugrunde gelegten Kategorien hinsichtlich der an ihnen unmittelbar aufgewiesenen Grundrelationen. Die logische Struktur eines solchen Urteils kann zureichend nur dadurch beschrieben werden, daß man angibt, in welcher Weise, Reihenfolge und Kombination unsere 7 Prinzipien an seinem Aufbau aus den Grundrelationen beteiligt sind. Von der alten Lehre, daß ein Satz immer aus Subjekt, Prädikat und Kopula bestehe, sind wir hier unendlich weit entfernt. Die dargelegte Syntax der Relationen gibt einen festen Ausgangspunkt für eine *logische Kritik der Sprache.*

Vgl. z. B. die Ausführungen von *Russell* (Einführung in die mathematische Philosophie, deutsch München 1923, Kap. 16) über den nicht deiktisch gebrauchten bestimmten Artikel (wie im Satz: die durch die beiden voneinander verschiedenen Punkte A, B hindurchgehende Gerade geht auch durch C hindurch). — *Generell* heißt ein Urteil, bei dessen Aufbau niemals das Prinzip 5. der Ausfüllung durch einen unmittelbar aufgewiesenen Gegenstand („dieser da") herangezogen wird. Der Gegensatz dazu ist *partikulär.* (Man könnte noch unterscheiden den rein partikulären Fall, wo nur 5., niemals Π_x oder Σ_x zur Ausfüllung verwendet wird, von dem „gemischt" generell-partikulären.) Ein Gegenstand a erweist sich als *Sonderwesen,* wenn er durch eine *einschlägige generelle* Eigenschaft vollständig gekennzeichnet ist; d. h. wenn unter Ausschaltung des Prinzips 5. eine Eigenschaft konstruiert wurde, welche dem Gegenstand a, aber keinem anderen der betreffenden Kategorie zukommt. Existenz ist aussagbar nur von etwas so durch eine Eigenschaft Beschriebenem, nicht von etwas Genanntem, Σ_x trägt notwendig eine Leerstelle als Index (zur Kritik des ontologischen Gottesbeweises verwertbare Bemerkung). Innerhalb des Zahlenreiches ist 1 ein Sonderwesen, weil 1 die einzige Zahl ist, welche auf keine andere folgt. *Alle Zahlen der Zahlenreihen sind Sonderwesen.* Hierauf beruht in erster Linie das Gefühl des Geheimnisvollen an der Zahl, die Zahlenmagie: daß in der Zahlenreihe der Geist aus sich eine unendliche Mannigfaltigkeit wohlcharakterisierter Sonderwesen erzeugt; nachfühlbar auch für uns z. B. in dem undurchsichtigen Gesetz der Verteilung der Primzahlen. Nicht minder beruht aber auf der freien Herstellbarkeit und dem individuellen Charakter der Zahlen ihre Verwendung zur exakten theoretischen Erfassung des Wirklichen. Für die Punkte im Raume trifft das genaue Gegenteil zu: Eine aus den geometrischen Grundrelationen ohne Aufweisung einzelner Punkte, Geraden oder Ebenen abgeleitete Eigenschaft, die einem Punkte zukommt, kommt auch jedem andern zu. In dieser begrifflichen spiegelt sich die anschauliche *Homogenität* des Raumes wieder. Eben hierauf zielt die das Wesen „ähnlicher" Figuren in der Geometrie prinzipiell erfassende *Leibniz*sche Erklärung: „Ähnlich ist das, was für sich beobachtet nicht voneinander unterschieden werden kann." (Mathemat. Schriften, ed. Gerhardt, V, S. 180.)

2. Die aufbauende mathematische Definition

Neben der im ersten Paragraphen besprochenen kombinatorischen Definition abgeleiteter Relationen verfügt die Mathematik über eine *schöpferische*, neue ideale Gegenstände erzeugende Definition. So erklärt man in der ebenen Geometrie auf Grund der in den geometrischen Axiomen auftretenden dreistelligen Punktrelation der Kongruenz $OA = OB$ den Begriff des *Kreises* folgendermaßen: Ein Punkt O und ein von ihm verschiedener Punkt A bestimmen einen Kreis, den „Kreis um O durch A". Daß ein Punkt P diesem Kreise angehöre, soll besagen, daß $OA = OP$ ist. — Es ist für den Mathematiker ganz gleichgültig, was Kreise sind; es ist allein wichtig zu wissen, auf welche Weise ein Kreis gegeben werden kann (nämlich durch O und A), und was es heißt, daß ein Punkt P dem so gegebenen Kreise angehöre. Nur in Aussagen der letzten Form und solchen, die auf Grund ihrer explizit definiert sind, tritt der Begriff des Kreises auf. Darum ist der Kreis um O durch A dann und nur dann mit dem Kreise um O' durch A' identisch, wenn alle Punkte, welche dem ersten Kreise angehören, auch dem zweiten angehören und umgekehrt. Die geometrischen Axiome lassen erkennen, daß dieses auf die unendliche Mannigfaltigkeit *aller* Punkte bezugnehmende Kriterium durch ein endliches ersetzt werden kann: O' muß mit O zusammenfallen und $OA' = OA$ sein.

Weitere Beispiele. 1. Niemand kann erklären, was eine *Funktion* ist. Aber: „Eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmäßige Weise jeder reellen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist (wie z. B. durch die Formel $b = 2a + 1$). Man sagt dann, b sei der *Wert* der Funktion f für den Argumentwert a." Infolgedessen gelten zwei (auf verschiedene Weise definierte) Funktionen als gleich, wenn für alle möglichen Argumentwerte a die zugehörigen beiden Funktionswerte stets zusammenfallen.

2. In der euklidischen Geometrie sind die „*unendlich fernen Punkte*", in denen sich angeblich parallele Gerade schneiden, solche durch die schöpferische mathematische Definition zu den wirklichen Punkten hinzugefügte ideale Elemente. Allgemeiner kann man auf diese Weise von

den geometrischen Gebilden eines begrenzten allein zugänglichen Raumstücks R aus die unzugänglichen als ideale Punkte einführen (einschließlich der unendlich fernen) und so das begrenzte Raumstück zum vollständigen Raum der projektiven Geometrie ideal erweitern. Es gilt hier, durch geometrische Konstruktionen in R zu erkennen, wann mehrere wirkliche, d. i. R durchsetzende Gerade von dem *gleichen* idealen Punkte ausstrahlen. Man definiert diesen Punkt am einfachsten als Scheitel einer (aus wirklichen Geraden gebildeten) dreiseitigen Ecke. So kommt man zu der Erklärung: „Drei nicht in einer Ebene liegende Gerade $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die aber zu je zweien in einer Ebene liegen, bestimmen einen ‚idealen Punkt' $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$. Daß die Gerade $\mathfrak{g}$ durch diesen Punkt hindurchgehe, soll besagen, daß $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{a}$ in einer Ebene liegt, ebenso $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{b}$, ebenso $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{c}$." Daraus ergibt sich wieder, wann zwei derartige ideale Punkte als identisch zu betrachten sind. Jedem wirklichen Punkt p entspricht ein und nur ein idealer Punkt π von der Beschaffenheit, daß jede durch p gehende Gerade im Sinne unserer Definition durch π hindurchgeht. So kann man einen Teil der idealen Punkte mit den wirklichen Punkten identifizieren. (Vgl. *Pasch*, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, S. 40.) Nach dem gleichen Schema vollzieht die Mathematik stets die Erweiterung eines zunächst vorliegenden Operationsbereiches durch ideale Elemente; es geschieht das, um die Gültigkeit einfacher Gesetze zu erzwingen. So hat die Hinzufügung der unendlich fernen Punkte zur Folge, daß nicht bloß zwei verschiedene Punkte stets durch eine Gerade verbunden werden können, sondern auch zwei verschiedene Gerade, die derselben Ebene angehören, sich stets in einem Punkte schneiden. Die Einführung des *Imaginären* in die Geometrie zur Erzwingung einfacher allgemein gültiger Schnittpunktsätze im Gebiet der algebraischen Kurven und Flächen, die Einführung der *idealen Zahlen* in die Zahlentheorie durch *Kummer* zur Wiederherstellung der beim Übergang von den rationalen zu den algebraischen Zahlen zunächst verloren gehenden Teilbarkeitsgesetze sind wohl die glänzendsten Beispiele für die Fruchtbarkeit dieser *Methode der idealen Elemente*.

Ein Sonderfall davon ist das Verfahren der *Definition durch Abstraktion*. Eine zweistellige Beziehung $a \sim b$ in einem Objektbereich heißt eine *Äquivalenz* (eine *Beziehung vom Charakter der Gleichheit*), wenn allgemein folgendes gilt:

1. $a \sim a$;
2. ist $a \sim b$, so auch $b \sim a$ (Kommutativität);
3. ist $a \sim b$, $b \sim c$, so auch $a \sim c$ (Transitivität).

Durch die Übereinkunft, zwei Dinge a, b dann und nur dann als voneinander verschieden zu betrachten, wenn sie nicht der Äquivalenzbeziehung $a \sim b$ genügen, entsteht aus dem ursprünglichen „*durch Abstraktion*“ ein neuer Objektbereich.

Beispiele und Erläuterungen. 1. Die Ähnlichkeit geometrischer Figuren ist eine Äquivalenz. Man schreibt jeder Figur eine bestimmte „*Gestalt*“ zu, und zwei Figuren haben dann und nur dann dieselbe Gestalt, wenn sie zueinander ähnlich sind. In mehr philosophischer Ausdrucksweise pflegt man zu sagen: der Begriff der Gestalt entsteht aus dem der Figur, indem man von Lage und Größe abstrahiert. Erkenntnispraktisch bedeutet die Aufstellung eines solchen abstrahierten Begriffes, daß ausschließlich *invariante Eigenschaften und Beziehungen* zwischen den ursprünglichen Objekten in Betracht gezogen werden sollen. $R(xy)$ ist gegenüber der Äquivalenz $\sim$ invariant, wenn mit $R(ab)$ allemal auch $R(a'b')$ besteht, falls $a' \sim a$, $b' \sim b$ ist. 2. Zwei Mengen A und B von Gegenständen (etwa die Personen und Stühle in einem Saal) nennen wir gleichzahlig, $A \sim B$, wenn es möglich ist, die Elemente von A mit den Elementen von B beiderseits eindeutig zu paaren (wenn es möglich ist, auf jeden Stuhl eine Person zu setzen, so daß kein Stuhl frei bleibt, aber auch jede Person einen Platz bekommt). Die Gleichzahligkeit ist offenbar eine Äquivalenz. „Jede Menge bestimmt eine *Anzahl*; zwei Mengen dann und nur dann dieselbe Anzahl, wenn sie gleichzahlig sind.“ (Diese Erklärung findet sich schon bei *Hume*, Treatise on Human Nature, Teil III, Abschn. 1)[1]). In nachlässigerer Form pflegt man das so auszudrücken, daß die Anzahl aus der Menge entsteht, wenn man von der Natur ihrer Elemente abstrahiert und lediglich ihre Unterschiedenheit festhält. Der zuweilen gemachte Einwurf, daß alle Elemente, wenn man sie zu bloßen Einsen degradiert, in eines zusammenfielen, wird durch die obige präzise Formulierung abgeschnitten.

An diesem Beispiel der Anzahl möge gezeigt werden, inwiefern die

---

1) Es lohnt sich, die Stelle zu zitieren: „When two numbers are so combined, as that the one has always an unit answering to every unit of the other, we pronounce them equal; and it is for want of such a standard of equality in extension, that geometry can scarce be esteemed a perfect and infallible science.“

Definition durch Abstraktion ein Sonderfall der schöpferischen Definition ist. Ihr ordnet sie sich in folgender Gestalt unter: „Jede Menge A bestimmt eine Anzahl (A). Daß die beliebige Menge M aus (A) Elementen bestehe, soll besagen, daß M mit A gleichzahlig ist." Danach stimmt die Anzahl (A) mit der Anzahl (B) überein, wenn jede Menge M, welche $\sim A$ ist, auch $\sim B$ ist, und umgekehrt. Nach den an die Äquivalenz gestellten Forderungen 2) und 3) ist dies aber dann und nur dann der Fall, wenn $A \sim B$ ist. Endlich garantiert die Forderung 1) dafür, daß insbesondere die Menge A selber aus (A) Elementen besteht. — 3. Zwei ganze Zahlen heißen nach *Gauß* kongruent modulo 5, wenn ihre Differenz durch 5 teilbar ist. Die Kongruenz ist eine Beziehung vom Charakter der Gleichheit; durch die zugehörige Abstraktion entstehen aus den ganzen Zahlen die *Kongruenzzahlen* mod. 5. Da die Operationen der Addition und Multiplikation invariant sind gegenüber der Kongruenz, so erhält man auf diese Weise einen endlichen Bereich aus nur 5 Elementen, innerhalb dessen sich ebenso Algebra treiben läßt wie im unendlichen Bereich der gewöhnlichen rationalen Zahlen. Z. B. ist hier $2 + 4 = 1$, $3 \cdot 4 = 2$ (mod. 5). Nicht nur Subtraktion, sondern auch Division läßt sich ausführen, weil 5 eine Primzahl ist. Dieses Beispiel ist für die Zahlentheorie von fundamentaler Bedeutung. — 4. Auch die wichtigsten physikalischen Begriffe entstehen nach dem Schema der mathematischen Abstraktion. Wir kommen darauf im naturwissenschaftlichen Teil gelegentlich des Messens zurück.

Das Prinzip der Definition durch Abstraktion finde ich bei *Leibniz* angedeutet in dem fünften der Briefe an *Clarke*. Er sagt da (Auswahl v. *Cassirer*, I, S. 185): „Im übrigen habe ich es hier ungefähr so gemacht wie *Euklid*: der, da er den Begriff des geometrischen Verhältnisses im absoluten Sinne nicht recht definieren konnte, bestimmte, was unter gleichen Verhältnissen zu verstehen ist." Und kurz vorher (a. a. O., S. 183): „Der Geist aber ist mit dieser Übereinstimmung nicht zufrieden; er sucht eine Identität, ein Ding, das wahrhaft dasselbe wäre, und er stellt es sich wie außerhalb der Subjekte vor." In der Mathematik ist das Prinzip erst im 19. Jahrhundert, und zwar in der vielgestaltigsten Form, zu entscheidender Wirksamkeit gekommen. In seiner Allgemeinheit bewußt formuliert findet es sich bei *Pasch* (1882) an einer schon oben zitierten Stelle, noch klarer bei *Frege*, Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, §§ 63—68. Vgl. ferner *Helmholtz*, Zählen und Messen (1887), Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. 3, S. 377.

Neben die hier besprochene mathematische Form der Abstraktion wird man geneigt sein, eine originäre Abstraktion zu stellen. Ich kann an einer Blume das abstrakte Moment der Farbe als solches herausheben; dies ist hier das Primäre, das ev. sich darauf gründende Urteil, daß zwei Blumen die gleiche Farbe rot haben, das Sekundäre. Während bei der mathematischen Abstraktion die Gleichheit das Primäre ist, das Moment aber, in bezug auf welches Gleichheit stattfindet, erst aus der Gleichheitsbeziehung gewonnen wird. Aber ich kann auch die Zahlen derselben Kongruenzklasse mod. 5 dadurch charakterisieren, daß sie alle bei der Teilung durch 5 denselben Rest lassen, die Ähnlichkeit zweier Dreiecke dadurch, daß sich an beiden dieselben Maßzahlen der Winkel und der Seitenverhältnisse ergeben. Das allgemeine Konstruktionsverfahren des Restes bzw. dieser Maßzahlen tritt an Stelle des Moments „Farbe“, die Identität seines Resultates an zwei Objekten an Stelle des identischen „rot“ an zwei Sinnendingen. Die originäre ordnet sich also der mathematischen Abstraktion unter. Das Gemeinsame aller *kongruenten* Dreiecke, das Gemeinsame aller am gleichen Orte sich befindenden Körper aber bin ich nicht imstande durch ein objektives Merkmal zu bezeichnen (dies letzte Beispiel hat *Leibniz* a. a. O. im Auge), sondern nur durch den Hinweis: *diesem* Dreieck kongruent, an *diesem* Orte befindlich. Unsere Frage hängt hier mit dem Relativitätsproblem zusammen (§ 13), dem Gegensatz zwischen begrifflicher Definition und anschaulicher Aufweisung. Im einen und im andern Fall bleibt aber die Umwandlung des gemeinsamen Merkmals in ein ideales Objekt, z. B. der Eigenschaft rot in eine gegenständliche „rote Farbe“, an welcher die roten Dinge „teilhaben“, ein wesentlicher Schritt (Platos μέθεξις).

Jeder in einer vorliegenden Gegenstandskategorie sinnvollen Eigenschaft $E(x)$ ordnen wir eine *Menge* zu, „die Menge der Dinge x, welche die Eigenschaft E besitzen“. So sprechen wir von der Menge aller geraden Zahlen, von der Menge der Primzahlen, von der Menge aller auf einer gegebenen Geraden liegenden Punkte. Die Vorstellung, daß eine solche Menge durch Kolligieren aus ihren einzelnen Elementen zusammengebracht wäre, ist durchaus fernzuhalten. Daß wir die Menge kennen, soll nichts anderes besagen, als daß uns eine für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft gegeben ist. Nur bei endlichen Mengen besteht neben der *generellen* die Möglichkeit einer *individuellen* Beschreibung, durch Aufzeigung jedes einzelnen ihrer Elemente. [Übrigens läßt sich formal diese der gesetzmäßigen Beschreibung unterordnen: die aus drei vorliegenden Gegenständen a, b, c gebildete Menge entspricht der Eigenschaft, a oder b oder c zu sein: $(x = a) \vee (x = b) \vee$

$(x = c)$.] Zwei Eigenschaften E und E' korrespondiert aber unter Umständen *dieselbe* Menge; nämlich dann, wenn jeder Gegenstand (unserer Kategorie), dem die Eigenschaft E zukommt, auch die Eigenschaft E' hat und umgekehrt. Für die Identität zweier Mengen ist also, im Gegensatz zu den Eigenschaften, nicht entscheidend, wie sie (mit Hilfe der in § 1 aufgezählten Prinzipien aus den Grundrelationen) definiert sind, sondern allein der aus dem Sinne nicht abzulesende, auf ein Reich *existierender* Gegenstände sich beziehende sachhaltige Umstand, ob jedes Element der einen Menge auch Element der andern ist und umgekehrt. Faßt man den Mengenbegriff in dieser Weise, so sieht man, daß die schöpferische Definition nichts anderes ist als der Übergang von der Eigenschaft zur Menge, daß also die mathematische Überbauung durch neue Klassen idealer Objekte sich allgemein als *Mengenbildung* kennzeichnen läßt. Es hat jetzt nichts Anstößiges mehr, den Kreis um O durch A als die Menge aller Punkte P zu bezeichnen, deren Entfernung von O gleich OA ist, die Farbe eines Gegenstandes als die Menge aller mit ihm gleichfarbigen Dinge, die Anzahl 5 als die Menge aller derjenigen Inbegriffe, welche mit dem vorgewiesenen Inbegriff der Finger meiner rechten Hand gleichzahlig sind. Es ist freilich eine Illusion — der sich *Dedekind*, *Frege* und *Russell* eine Zeitlang hingaben, weil sie sich offenbar die „Menge" doch als ein Kollektivum vorstellten —, wenn man meint, damit die idealen Objekte konkret gefaßt zu haben. Es ist eher umgekehrt so, daß durch das Prinzip der schöpferischen Definition der Sinn des allgemeinen Mengenbegriffs aufgeklärt und vor falschen Deutungen geschützt wird. Die zur Erschaffung neuer Abstrakta Φ benutzten Eigenschaften hängen im allgemeinen von einem oder mehreren Argumenten $u, v, \ldots$ ab, die in gewissen Objektbereichen frei variieren können: Φ ist eine *Funktion* von $u, v, \ldots$. So wird bei der Definition des Kreises die dreistellige Punktrelation $OP = OA$ als eine von O und A abhängige Relation (Eigenschaft) mit der einen Leerstelle P aufgefaßt; der „Kreis um O durch A" ist eine Funktion von O und A. Wichtig sind solche Fälle, wo das transfinite, an die Allheit eines Reiches existierender Gegenstände appellierende Kriterium für die Übereinstimmung zweier Werte des Abstraktums, $\Phi(u, v, \ldots)$ und $\Phi(u', v', \ldots)$, auf Grund allgemein gültiger Tatsachen in ein finites, am Sinn der definierenden Relation abzulesendes umgewandelt werden kann, wie das beim Kreise der Fall war und bei den Definitionen durch Abstraktion. — Statt durch Eigenschaften können die idealen Elemente auch durch *Relationen* definiert sein. Wollen wir auch hier die mengentheoretische Ausdrucksweise beibehalten, so müssen wir jeder zweistelligen Relation R z. B. eine „*zweistellige Menge*“ (R) entsprechen lassen; derart daß (R) mit (R') identisch ist, wenn bei beliebigen Elementen a, b von den beiden Aussagen $R(a, b)$, $R'(a, b)$ niemals die eine wahr, die andere falsch ist. Die endgültige Fassung des Prinzips der schöpferischen Definition ist danach die folgende: *Eine Relation* $R(xy../uv..)$, *unter deren Leerstellen einige* $xy\ldots$ *von den andern* $uv\ldots$ *abgesondert sind, bestimmt ein von* $uv\ldots$ *abhängiges Abstraktum* $\Phi(uv\ldots)$; *es ist dann und nur dann* $\Phi(uv\ldots) = \Phi(u'v'\ldots)$, *wenn Gegenstände* $x, y, \ldots$ *der betreffenden Kategorien, welche zu* $u, v, \ldots$ *in der Relation* R *stehen, immer auch zu* $u', v', \ldots$ *in dieser Relation stehen, und umgekehrt.*

3. Das logische Schließen

Nachdem das Definieren besprochen ist, kommen wir zum *Beweisen.* Macht man einen geometrischen Satz zu einem hypothetischen Urteil, dessen Vordersatz aus den sämtlichen geometrischen Axiomen besteht, und ersetzt im Geiste die abkürzenden Ausdrücke durch das, was sie laut Definition bedeuten, so entsteht ein „*formal gültiges*“, „*analytisches*“ *Urteil,* dessen Wahrheit an den Sinn der darin eingehenden Begriffe: Punkt, Gerade, Ebene, liegt auf, zwischen, kongruent, in keiner Weise gebunden ist. In der Logik des Schließens handelt es sich darum, diejenigen Urteilsstrukturen zu kennzeichnen, welche die formale Gültigkeit des Urteils bedingen. *Barbara, Baralipton* usw. helfen dazu nicht viel. *Leibniz* sah in der Lehre von den „*argumens en forme*“ *une espèce de Mathématique universelle, dont l'importance n'est pas assez connue* (Nouveaux Essais, L. IV, ch. XVII, § 4).

Denjenigen Teil der Logik, welcher ausschließlich mit den logischen Verknüpfungen „nicht“, „und“, „oder“ operiert, wollen wir als *finite Logik* der *transfiniten* gegenüberstellen, die sich darüber hinaus der Aussageoperationen „es gibt" und „alle" bedient. Der Grund für diese Einteilung ist der folgende. Liegen vor mir mehrere Stücke Kreide, so ist die Aussage „Alle diese Stücke sind weiß" nur eine Abkürzung für die Aussage: Dies Stück ist weiß & dies Stück ist weiß & ... (indem ich eines nach dem andern vorzeige); ebenso ist „es gibt unter ihnen ein rotes" ein abkürzender Ausdruck für: Dieses ist rot $\vee$ dieses ist rot $\vee$ .... Aber nur bei endlichen Mengen, deren Elemente aufgewiesen sind, ist eine derartige Interpretation möglich. Für unendliche Mengen liegt im Sinne des „alle" und „es gibt" ein tiefes Problem verborgen, welches das Zentrum der Mathematik, das eigentliche Geheimnis des Unendlichen berührt; es wird sich uns im nachfolgenden Kapitel entfalten. Die Dinge stehen hier analog wie bei dem Übergange von den endlichen zu den unendlichen Summen; der letzteren Sinn ist an besondere Konvergenzbedingungen gebunden, und man kann mit ihnen nicht in jeder Hinsicht so operieren wie mit den endlichen.

Im Aussagekalkül ist es zweckmäßig, neben den Zeichen für „nicht", „und", „oder" noch das Symbol $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$, lies: aus $\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{b}$, einzuführen. Es meint nichts anderes als $\bar{\mathfrak{a}} \vee \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ gilt nicht oder $\mathfrak{b}$ gilt) und bezeichnet keinen darüber hinausgehenden tieferen Zusammenhang zwischen den Aussagen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Es würden übrigens zwei der vier Zeichen $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$ genügen; für den Aussagekalkül wählt man zweckmäßig $\rightarrow$ und $\overline{}$. Ja, man findet sogar mit einem Zeichen $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ sein Auslangen, das die Unverträglichkeit der Aussagen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bedeutet ($\bar{\mathfrak{a}} \vee \bar{\mathfrak{b}}$). An Stelle von

$$\bar{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$$

kann man nämlich schreiben

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}/(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}), \qquad (\mathfrak{a}/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}), \qquad (\mathfrak{a}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}).$$

Doch wollen wir hier um der Übersichtlichkeit willen alle vier Zeichen nebeneinander benutzen.

In einer finit-logischen Formel sind die Buchstaben („Aussagevariablen"), für welche beliebige Aussagen (Urteile ohne Leerstellen) eingesetzt werden dürfen, verknüpft durch jene vier Zeichen —, &, $\vee$, $\to$. Beispiel:

$$b \to (\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}).$$

Es gibt eine *allgemeine Vorschrift*, nach der man einer solchen Formel ihre formale Gültigkeit ansehen kann. Man erteile nämlich den vorkommenden Buchstaben einen der Werte „wahr" *W* oder „falsch" *F* in allen möglichen Kombinationen und bestimme jedesmal den Wert der gesamten Formel nach der folgenden Anweisung für die Wertbestimmung der Verknüpfungen:

$\mathfrak{a}$	$\bar{\mathfrak{a}}$
W	F
F	W

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	F

(Die Anzahl der durchzuprobierenden Kombinationen beträgt z. B., wenn in die Formel 5 verschiedene Aussagevariable eingehen, 2^5.) Ergibt sich als Wert der Formel in jedem Falle *W*, so ist sie formal gültig. Diese Vorschrift, von der man sagen kann, daß sie auf dem *Satze des Widerspruchs* und dem *tertium non datur* basiert sei, will ich kurz *„die finite Vorschrift"* nennen.

Beispiel: $\mathfrak{b} \to (\mathfrak{a} \to \mathfrak{b})$.

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$	$\mathfrak{b} \to (\mathfrak{a} \to \mathfrak{b})$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	W	W
F	F	W	W

Auf dieser Stufe kann man es einer Behauptung also direkt ansehen, man kann es durch ein kombinatorisches Verfahren nach festem Schema entscheiden, ob sie eine logische Folge gewisser anderer Sätze ist, wenn Voraussetzung und Behauptung aus Urteilen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ (gleichgültigen Sinnes) durch die vier Operationen $-$, $\rightarrow$, &, $\vee$ zusammengebaut sind.

Dies wird völlig anders, sobald „es gibt" und „alle" hinzutreten (mit ihnen halten auch die Leerstellen ihren Einzug in die Formeln). Σ_x und Π_x zwingen zur *Konstruktion:* wir stellen einige formal gültige Grundformeln als *logische Axiome* auf und geben eine *Regel* an, durch welche aus formal gültigen Urteilen neue formal gültige Urteile hervorgehen. Die Regel ist keine andere als die, nach welcher Logik auf alle theoretischen Wissenschaften angewendet wird, *der Syllogismus:* Hast du ein Urteil $\mathfrak{A}$ und ein Urteil $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, in welchem links von $\rightarrow$ das erste Urteil $\mathfrak{A}$ auftritt, so stelle das Urteil $\mathfrak{B}$ hin. Alle Urteilsstrukturen, welche durch wiederholte Anwendung dieser Regel, ausgehend von den logischen Axiomen, gewonnen werden, haben analytischen Charakter, ohne daß es möglich wäre, unabhängig von der konstruktiven Erzeugung der einzelnen Strukturen ihre unendliche Mannigfaltigkeit deskriptiv zu kennzeichnen. *Daher die Notwendigkeit des Beweises Schritt für Schritt.* So kann man mit einem von *J. Fries* in etwas anderem Sinne geprägten Wort sprechen von einer „ursprünglichen Dunkelheit der Vernunft". Wir *haben* die Wahrheit nicht, sondern sie will durch Handeln gewonnen sein.

Galilei (Dialogo, Opere complete, Firenze 1842/56, Bd. I, S. 116) spricht einen verbreiteten Gedanken aus, wenn er hierin den Unterschied der menschlichen von der göttlichen Erkenntnis sieht: „Wir gehen mittels schrittweiser Erörterung weiter von Schluß zu Schluß, während Er durch bloße Anschauung begreift. So beginnen wir z. B., um die Kenntnis einiger Eigenschaften des Kreises zu gewinnen, deren er unendlich viele besitzt, bei einer der einfachsten, stellen sie als seine Definition hin und gehen von ihr aus durch Schlüsse zu einer zweiten über, von dieser zu einer dritten, sodann zu einer vierten usw. Der göttliche Intellekt hingegen begreift durch bloße Erfassung seines Wesens ohne zeitliches Erwägen die unendliche Fülle seiner Eigenschaften" (*intensive*, der objektiven Gewißheit nach, aber stehe in jeder gewonnenen mathematischen Einsicht der menschliche Intellekt dem göttlichen nicht nach).

Über „es gibt" und „alle", Σ_x und Π_x, können wir zunächst die beiden folgenden Axiome aufstellen, in denen für $\mathfrak{a}(x)$ ein beliebiges Urteilsschema mit der einen Leerstelle x gesetzt werden darf und für c ein aufgewiesener Gegenstand der zugehörigen Kategorie:

$$I. \quad \Pi_x \mathfrak{a}(x) \to \mathfrak{a}(c); \qquad II. \quad \mathfrak{a}(c) \to \Sigma_x \mathfrak{a}(x).$$

Sie gestatten uns nur, *aus* der Allheitsaussage etwas zu folgern, aber sie schildern noch nicht, wie man von andern Urteilen her jemals *auf* eine Allheitsaussage schließen kann. Für das „es gibt" verhält es sich umgekehrt.

Das klassische Schulbeispiel eines Schlusses — (α) alle Menschen sind sterblich, (β) Cajus ist ein Mensch; also (γ) Cajus ist sterblich — vollzieht sich bei uns in mehreren Stufen. M und S mögen die Eigenschaften bedeuten, Mensch und sterblich zu sein, der Buchstabe c den Cajus. Er liefert

$$(\alpha) \quad \Pi_x \big(M(x) \to S(x)\big)$$

in Verbindung mit I:

$$\Pi_x \big(M(x) \to S(x)\big) \to \big(M(c) \to S(c)\big)$$

durch die Schlußregel die Aussage:

$$M(c) \to S(c).$$

Aus (β): $M(c)$ und dem vorigen Urteil abermals durch die Schlußregel:

$$(\gamma) \quad S(c).$$

So wie in (α), kann sich das $\to$ mit dem „alle" zu einem *allgemeinen hypothetischen Satz* verbinden, an sich enthält es die Idee der Allheit nicht. Die Geltung eines allgemeinen Folgesatzes von der Form

$$\Pi_x \big(\mathfrak{a}(x) \to \mathfrak{b}(x)\big)$$

kann natürlich verschiedene Fundamente haben. Wenn sie allein in den logischen Axiomen liegen, drückt das Zeichen $\to$ eine rein logische Folge aus; doch mag das Fundament auch in einem sachhaltigen Wesensgesetz, einem naturgesetzlich bestehenden Wirkungszusammenhang oder einer empirischen Regelmäßigkeit liegen. Diese Bemerkung halte ich zur Klärung der Frage für ausreichend, was das Verhältnis von Ursache und Wirkung mit dem von Grund und Folge zu tun hat. Doch bleibt das Zeichen $\to$ alledem gegenüber neutral.

Die finiten logischen Axiome findet man aufgezählt bei *Ackermann*, Mathem. Annalen 93 (1924), S. 4; ferner in Grundlagen der Mathematik, I, von *D. Hilbert* und *P. Bernays*, Berlin 1934, S. 66. Sie sind natürlich so gebaut, daß sich ihre formale Gültigkeit aus der „finiten Vorschrift" ablesen läßt. Man kann aber auch umgekehrt zeigen — doch erfordert dies schon einen eigentlichen mathematischen, nicht ganz auf der Oberfläche liegenden Beweis —, daß alle nur die Zeichen $\overline{}$, $\rightarrow$, &, $\vee$ enthaltenden logischen Formeln, welche nach der „finiten Vorschrift" formal gültig sind, aus diesen wenigen Axiomen durch Substitution und wiederholte Anwendung der Syllogismenregel gewonnen werden können; daher ist die Aufzählung vollständig. Die transfinite Axiomgruppe aber, von der wir bis jetzt nur die beiden Axiome I. und II. kennen, bleibt ergänzungsbedürftig.

Mit Hilfe der Schlußregel kann man aus den logischen Axiomen neue abgeleitete Beweisregeln gewinnen. Jedes formal gültige Urteil von der Bauart $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus den Aussagevariablen, den unbestimmten Urteilen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... durch die logischen Zeichen zusammengebaut sind) führt nämlich mit Hilfe des Syllogismus zu der Regel: Hast du ein Urteil von der Gestalt $\mathfrak{A}$, so kannst du daraufhin das entsprechende Urteil von der Gestalt $\mathfrak{B}$ hinstellen. Umgekehrt hat auch die Syllogismusregel ihren Repräsentanten unter den logischen Formeln:

$$\mathfrak{a} \rightarrow ((\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{b}).$$

Dennoch kommt man, da Konstruieren Handeln heißt, mit Formeln allein nicht aus, man braucht durchaus eine praktisch auszuübende Schlußregel. Das ist wohl der richtige Kern der Ansicht vom *normativen Charakter der Logik*.

Kants Unterscheidung von *analytischen* und *synthetischen Urteilen* (Kritik der reinen Vernunft, Einleitung) ist so unklar gefaßt, daß ein Vergleich mit dem scharfen Begriff der formalen Gültigkeit in der mathematischen Logik — der letzten Endes durch die logischen Axiome statuiert wird — nicht gut möglich ist. Hingegen deckt sich mit ihm die *Husserl*sche Definition (Logische Untersuchungen, Bd. II, 2. Aufl., S. 254): „Analytische Gesetze sind unbedingt allgemeine Sätze, welche keine anderen Begriffe als formale enthalten. Den analytischen Gesetzen stehen gegenüber ihre Besonderungen, welche durch Einführung sachhaltiger Begriffe und ev. individuelle Existenz setzender Gedanken erwachsen. Wie überhaupt Besonderungen von Gesetzen Notwendigkeiten ergeben, so Besonderungen analytischer Gesetze analytische Notwendigkeiten."

LITERATUR

G. W. Leibniz, Philosophische Schriften, VII, S. 43—247, 292—301. Mathematische Schriften, VII, S. 49—76, 203—216.

L. Couturat, La logique de Leibniz. Paris 1901. Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Paris 1903.

G. Boole, The Mathematical Analysis of Logic. London und Cambridge 1847. An Investigation of the Laws of Thought. London 1854. Neudruck in: Collected Logical Works, Chicago und London 1916.

E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik. 3 Bände, Leipzig 1890—1895.

A. N. Whitehead und *B. Russell*, Principia Mathematica. 3 Bände, Cambridge 1910—1913; 2. Aufl. 1925—1927.

B. Russell, The Principles of Mathematics. Cambridge 1903; 2. Aufl. New York 1938. Introduction to Mathematical Philosophy. 2. Aufl. London 1920.

L. Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, New York und London 1922 und Frankfurt/M. 1960.

C. I. Lewis und *C. H. Langford*, Symbolic Logic. New York 1932.

A. Tarski, Introduction to Logic. New York 1941.

H. Freudenthal, Einführung in die Sprache der Logik. München 1965.

4. Die axiomatische Methode

Die axiomatische Methode besteht einfach darin, die Grundbegriffe und die Grundtatsachen, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln. Ist dies möglich, so nennt *Husserl* das betreffende Sachgebiet *definit*. So steht es mit der Lehre vom Raum. — Natürlich kann ich aus den geometrischen Axiomen nicht das Attraktionsgesetz herleiten. Darum mußte oben genau erklärt werden, was als *einschlägiges* Urteil eines Sachgebietes zu gelten hat. Ebenso wenig kann ich aus den geometrischen Axiomen entscheiden, ob Zürich von Hamburg weiter entfernt ist als Paris; diese Frage handelt wohl von einer geometrischen Beziehung, aber zwischen individuell aufgewiesenen Raumstellen. Was deduktiv aus den Axiomen soll gefolgert werden können, sind also, genau gesagt, die *einschlägigen generellen wahren* Urteile.

„Hierauf beruht mithin diese ganze Kunst zu überzeugen. Sie ist in zwei Grundsätzen enthalten: alle Bezeichnungen, die man verwendet, zu definieren; und alles zu beweisen, indem man im Geist die definierten Ausdrücke durch die Definitionen ersetzt“: so *Pascal* in einem Vortrag über den *esprit géométrique* (entnommen aus: *K. Bornhausen*, *Pascal*, Basel 1920). Nur ist dies leichter gesagt als getan. *Euklids* „Elemente“ bringen noch keine vollständige Lösung des Problems, die Geometrie zu axiomatisieren. Er beginnt mit ὅροι, Definitionen; sie sind aber nur zum Teil Definitionen in unserem Sinne, die wichtigsten vielmehr Deskriptionen, Hinweise auf das nur in der Anschauung zu Gebende. Etwas anderes ist ja in Wahrheit für die geometrischen Grundbegriffe wie „Punkt“, „zwischen“ usw. nicht möglich; für den deduktiven Aufbau der Geometrie sind aber offenbar derartige Deskriptionen ohne Belang. Es folgen unter dem Namen αἰτήματα einige geometrische Axiome, vor allem das Parallelenaxiom: Gegeben eine Ebene E, in ihr eine Gerade $\mathfrak{g}$ und ein nicht auf der Geraden liegender Punkt p; alle in der Ebene E gelegenen, durch den Punkt p hindurchgehenden Geraden, mit Ausnahme einer einzigen, schneiden $\mathfrak{g}$. Endlich ein paar allgemeine Größenaxiome: κοιναὶ ἔννοιαι. In die geometrische Entwicklung spielen sie dadurch hinein, daß später stillschweigend von gewissen geometrischen Beziehungen wie der Kongruenz, der Flächengleichheit, angenommen wird, daß sie ihnen genügen. Hinter ihnen verbirgt sich also eine ungeklärte Fülle eigentlich geometrischer Axiome. In den späteren Büchern der „Elemente“ wird nach Bedarf die Liste der Axiome ergänzt. Infolge der anschaulichen Selbstverständlichkeit der geometrischen Grundsätze und der Unnatürlichkeit einer rein logisch-deduktiven Haltung hat es große Mühe gekostet, die geometrischen Axiome vollständig herauszuschälen. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ist hier die schon um 1830 von *Bolyai* und *Lobatschewsky* aufgestellte „*nichteuklidische Geometrie*“ die treibende Kraft. Die verstecktesten, die Axiome der Anordnung, deckt *Pasch* auf um 1880. Am Ende des Jahrhunderts ist das Ziel vollständig erreicht und findet einen klassischen Ausdruck in *Hilberts* „Grundlagen der Geometrie“. *Hilbert* ordnet die Axiome in fünf Gruppen: Axiome der Verknüpfung („liegt auf“), der Anordnung („zwischen“), der Kongruenz, der Parallelität und der Stetigkeit.

Das axiomatische Verfahren der Alten, das außer *Euklid* auch *Archimedes* mit bewundernswerter Freiheit handhabt, wurde vorbildlich für die Begründung der modernen Mechanik. Es beherrscht *Galileis* Lehre von der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung (Discorsi e dimostrazioni, 3. und 4. Tag), noch ausgesprochener

Huyghens' Aufstellung der Pendelgesetze im Horologium oscillatorium. Völlig durchgeführt ist das Programm der Axiomatik in außermathematischen Wissensgebieten in neuerer Zeit an der Statik der starren Körper, der Raum-Zeit-Lehre der speziellen Relativitätstheorie und andern Teilen der Physik.

Das Axiomensystem ist durch das behandelte Sachgebiet keineswegs eindeutig bestimmt, sondern in der Wahl der Grundbegriffe und Grundtatsachen besteht immer eine gewisse Willkür. Die Frage, ob sich hier ein wesenhaft Originäres einem wesenhaft Abgeleiteten gegenüberstellen läßt, liegt außerhalb der Kompetenz des Mathematikers[1]). Die ursprünglich gewählte Definition eines geometrischen Beziehungsbegriffes kann mit gleichem Recht durch irgendein nach den Tatsachen der Geometrie für das Bestehen der Beziehung notwendiges und hinreichendes Kriterium ersetzt werden.

Ein Axiomensystem muß unter allen Umständen *widerspruchslos* sein; d. h. es muß Gewißheit bestehen, daß durch logisches Schließen aus den Axiomen niemals eine Aussage $\mathfrak{a}$ und durch einen andern Beweis die entgegengesetzte Aussage $\mathfrak{a}$ gewonnen werden kann. Geben die Axiome die Wahrheit über ein Sachgebiet wieder, so kann freilich an ihrer Widerspruchslosigkeit kein Zweifel sein. Aber die Tatsachen stehen nicht immer so eindeutig Rede und Antwort, wie wir es wohl wünschen möchten; eine wissenschaftliche Theorie kann nicht getreue Wiedergabe des Gegebenen sein, so wie es mir gegeben ist, sondern ist fast immer kühne Konstruktion. Darum ist die Prüfung auf Widerspruchslosigkeit eine wichtige Kontrolle; sie ist in die Hände des Mathematikers gelegt. — Nicht unerläßlich, aber erwünscht ist die *Unabhängigkeit* der einzelnen Axiome eines Axiomensystems. Es soll keine überflüssigen Bestandteile enthalten, keine Sätze, die auf Grund der andern Axiome bereits beweisbar sind. Die Frage der Unabhängigkeit hängt mit der Widerspruchslosigkeit aufs engste zusammen; denn daß der Satz $\mathfrak{a}$ von gewissen vorliegenden Axiomen unabhängig ist, kommt darauf hinaus, daß der Satz $\bar{\mathfrak{a}}$ mit ihnen nicht in Widerspruch steht.

Die Abhängigkeit eines Satzes $\mathfrak{a}$ von andern Aussagen $\mathfrak{A}$ (einem Axiomensystem) ist festgestellt, sobald der Beweis von $\mathfrak{a}$ auf Grund

[1]) Zuweilen ist dies sicherlich der Fall. Unter den Verwandtschaftsrelationen sind Kindschaft und Ehe die *wesenhaft* ursprünglichen.

jener andern Aussagen in concreto vorliegt. Zur Feststellung der Unabhängigkeit aber gilt es die Einsicht zu gewinnen, daß durch keine noch so weit getriebene Kombination der Schlüsse jemals der Satz $\mathfrak{a}$ zustande kommt. Man verfügt über drei Methoden, dies Ziel zu erreichen; jede derselben kommt nach dem oben Gesagten auch für den Nachweis der Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems in Betracht.

1. Die erste beruht auf dem Grundsatz: wenn in $\mathfrak{a}$ ein neuer Urbegriff auftritt, der nicht auf Grund der in $\mathfrak{A}$ vorkommenden definiert ist, kann $\mathfrak{a}$ nicht aus $\mathfrak{A}$ erschlossen werden. Beispiel: Ein Schiff ist 80 m lang und 20 m breit; wie alt ist sein Kapitän? — Nur in den trivialsten Fällen kommt man mit diesem einfachen Gedanken zum Ziel.

2. Die *Konstruktion eines Modells:* es werden Objekte und Relationen aufgewiesen, welche bei geeigneter Namengebung die sämtlichen Aussagen $\mathfrak{A}$ erfüllen, für welche aber $\mathfrak{a}$ nicht gilt. Diese Methode hat bisher den größten Erfolg gehabt.

Das berühmteste Beispiel liefert das *Parallelenaxiom.* Es wurde von je her, schon im Altertum, nicht in demselben Maße als evident empfunden wie die übrigen geometrischen Axiome. Um es sicherzustellen, bemühte man sich jahrhundertelang, es auf Grund der andern zu beweisen. Der Zweifel an seiner tatsächlichen Geltung und dessen Überwindung war hier also das treibende Motiv. Daß die Bemühungen immer wieder fehlschlugen, konnte als induktives Argument für die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms angesprochen werden, wie das Mißlingen aller Bemühungen um die Konstruktion des *perpetuum mobile* ein induktives Argument für die Gültigkeit des Energiesatzes ist. Auch die Erbauer der nicht-euklidischen Geometrie haben nichts anderes getan als die Folgerungen aus der zum Parallelenaxiom entgegengesetzten Annahme gezogen, daß in einer Ebene durch einen Punkt zu einer den Punkt nicht enthaltenden Geraden ein ganzes Büschel nicht-schneidender Geraden existiert, und dabei konstatiert, daß sich unter freier Benutzung der übrigen Axiome der euklidischen Geometrie kein Widerspruch ergibt, *soweit sie die Sache verfolgt hatten.* Aber Sicherheit für alle Zukunft besaßen sie nicht. Erst *Klein* gab ein euklidisches Modell für die nicht-euklidische Geometrie an: die

Objekte der euklidischen Geometrie selber erfüllen bei einer von der üblichen abweichenden Namengebung die nicht-euklidischen Axiome. $\mathfrak{K}$ sei eine Kugel im euklidischen Raum. Das Lexikon, das die Übersetzung in die nicht-euklidische Sprache bewerkstelligt, besteht aus wenigen (von uns durch Anführungsstriche gekennzeichneten) Vokabeln: Unter „*Punkt*" wird jeder Punkt im Innern von $\mathfrak{K}$ verstanden. Daß mehrere solche „Punkte" auf einer „*Geraden*" liegen oder in einer „*Ebene*", daß ein „Punkt" „*zwischen*" zwei andern liegt, soll den gewöhnlichen Sinn behalten. „*Bewegung*" heiße jede Kollineation, welche die Kugel in sich überführt, „*kongruent*" solche Figuren, welche durch „Bewegung" auseinander hervorgehen. Für denjenigen, der an die Wahrheit und damit an die Widerspruchslosigkeit der euklidischen Geometrie glaubt, ist dadurch die Widerspruchslosigkeit, also die Denkbarkeit der nichteuklidischen bewiesen.

Die *Widerspruchslosigkeit der euklidischen Geometrie* aber kann, unabhängig von dem Glauben an ihre Wahrheit und ihren nur in der Raumanschauung aufzuweisenden Grundbegriffen, durch ein *arithmetisches Modell* erhärtet werden. Die analytische Geometrie, die am zweckmäßigsten auf den Vektorbegriff gegründet wird (§ 12), hat nämlich gezeigt, daß die euklidische Geometrie nur ein anderer Ausdruck ist für die Tatsachen der *linearen Algebra*, die Theorie der linearen Gleichungen. Die über die „affinen" hinausgehenden „metrischen" Begriffe werden dabei festgelegt mittels einer positiv-definiten quadratischen Form, der metrischen Fundamentalform. Übrigens muß man die Anzahl der Variablen (oder „Unbekannten") auf 3 normieren, um zu der Geometrie des *dreidimensionalen* Anschauungsraumes geführt zu werden. Zahlenlehre und Geometrie sind durch diese zwischen ihnen bestehende Korrespondenz so eng miteinander verwachsen, daß wir uns heute auch in der reinen Analysis beständig geometrischer Termini bedienen. Jeder Widerspruch in der Geometrie müßte sich zugleich als ein Widerspruch in der Arithmetik zu erkennen geben. Hierin erblicken wir eine Reduktion, weil die Zahlen in ganz anderem Maße freies Erzeugnis des Geistes und darum auch für den Geist durchsichtig sind als die Objekte und Beziehungen des Raumes.

Die Beispiele machen deutlich, daß die Modellmethode nicht darauf angewiesen ist, über die zur Konstruktion des Modells benutzten Objekte und Relationen die Wahrheit zu wissen, sondern sie führt die Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems $\mathfrak{A}$ (z. B. des geometrischen) auf die eines andern $\mathfrak{B}$ (z. B. des arithmetischen) zurück. Dies ist dann geleistet, wenn die Grundbegriffe des Systems $\mathfrak{A}$ so mit Hilfe der Grundbegriffe des Systems $\mathfrak{B}$ definiert sind, daß die Axiome $\mathfrak{A}$ eine logische Folge der Axiome $\mathfrak{B}$ sind. Um den inhaltlichen Sinn der Grundbegriffe in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$ braucht man sich dabei gar nicht zu kümmern; die Belegung der aus $\mathfrak{B}$ abgeleiteten Begriffe mit denjenigen Namen, welche die Grundbegriffe in $\mathfrak{A}$ tragen, ist rein willkürlich.

Durch scharfsinnige Konstruktion geeigneter arithmetischer Modelle hat *Hilbert* das logische Verhältnis der einzelnen Teile des geometrischen Axiomensystems zueinander weitgehend aufgeklärt.

Wenn wir es nur mit einer endlichen Anzahl von Objekten zu tun haben, die explizit nacheinander ausgewiesen und mit Symbolen belegt werden, so können wir die Widerspruchslosigkeit dadurch beweisen, daß wir für jeden einzelnen Schritt mittels den Symbolen feststellen, ob die Grundrelationen gelten oder nicht. Als Beispiel geben wir ein *kombinatorisches Modell*, das die Widerspruchslosigkeit der Inzidenzaxiome der ebenen projektiven Geometrie (mit der einzigen Relation „Punkt liegt auf Gerader“)festlegt. Das Modell besteht aus sieben Symbolen für Punkte, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ferner sieben Symbolen für Gerade, I, II, III, IV, V, VI, VII; die Inzidenz wird durch die folgende Tafel definiert, in der * etwa im Schnitt der Zeile 3 und Spalte VI bedeutet, daß Punkt 3 auf Gerader VI liegt:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
1		*	*	*			
2	*		*		*		
3	*	*				*	
4	*			*			*
5		*			*		*
6			*			*	*
7				*	*	*	

Aus dieser Tafel werden zum Beispiel die Axiome bestätigt, daß durch zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte genau eine Gerade geht (das heißt, zwei Zeilen enthalten genau ein Paar * in der gleichen Spalte), ferner daß sich zwei beliebige, voneinander verschiedene Gerade in genau einem Punkte schneiden!

Der Fall eines endlichen Systems nacheinander ausgewiesener Objekte ist vergleichsweise trivial. In allen andern Fällen vermag die Modellmethode lediglich die Widerspruchslosigkeit eines Systems auf die eines andern zu reduzieren. Schließlich muß einmal der Beweis für ein Axiomensystem *absolut* geführt werden. Für den größeren Teil der Mathematik und für die gesamte Physik behandelt ein solches Grundsystem den Begriff der *reellen Zahl.*

3. Für das Ziel eines absoluten Beweises der Widerspruchslosigkeit steht uns nur die *direkte Methode* zur Verfügung, welche aus den Regeln des deduktiven Schließens heraus zeigen soll, daß man niemals zu zwei entgegengesetzten Aussagen kommen kann. Voraussetzung für ihre Durchführung ist, daß diese logischen Spielregeln *vollständig* aufgezählt sind (vgl. § 3), so daß man sie auf die Sätze, blind gegenüber deren Sinn, wie die Regeln des Schachspiels auf die Brettsteine, anwenden kann. Erst in den allerletzten Jahren hat *Hilbert* das Problem in Angriff genommen, auf solchem Wege die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome sicherzustellen. (Würde eine neue evidentermaßen zwingende Weise des logischen Schließens entdeckt und damit das System der Spielregeln erweitert, so müßte man bei einem nach der direkten Methode erbrachten Beweis der Widerspruchsfreiheit darauf gefaßt sein, daß er durch die neue Entdeckung hinfällig wird. Die Modellmethode ist von den „Spielregeln“ nicht abhängig.)

Ein Analogon aus dem Gebiete des Schachspiels ist etwa das folgende: man soll einsehen, daß in einer den Regeln gemäß gespielten Schachpartie, wie sie im einzelnen auch verlaufen möge, niemals eine Stellung vorkommen wird, in welcher 10 Damen der gleichen Farbe auftreten. Hier gelingt die „direkte Methode“, indem man aus den Zugregeln abliest, daß ein Zug die Summe der Anzahl der Damen und der Bauern einer Farbe nicht vergrößern kann; da sie am Anfange $= 9$ ist, bleibt sie dauernd $\leqq 9$. — Die Methode 1. ist ein trivialer Sonderfall der direkten. Aber um ihrer Einfachheit willen verdiente sie wohl besondere Erwähnung.

Neben der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit wird man von den Axiomen, die zur Grundlage einer Wissenschaft dienen sollen, die *Vollständigkeit* fordern. Was soll das heißen? Daß sich für jede generelle einschlägige Aussage $\mathfrak{a}$ die Frage „gilt $\mathfrak{a}$ oder $\bar{\mathfrak{a}}$?“ durch logische Schlüsse auf Grund der Axiome müsse entscheiden lassen? Dann garantierte die Widerspruchsfreiheit, daß man niemals zu *beiden* Aussagen $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ gelangt, die Vollständigkeit, daß man stets zu *einer* von beiden gelangen kann. Die Vollständigkeit in diesem Sinne würde nur durch die Angabe einer das Beweisverfahren fest regelnden Methode verbürgt werden, die nachweislich für jedes einschlägige Problem zur Entscheidung führt. Die Mathematik wäre damit trivialisiert. Aber ein solcher „Stein der Weisen“ ist bisher nicht gefunden worden und wird niemals gefunden werden. Die Mathematik besteht nicht darin, aus vorgegebenen Voraussetzungen die logischen Folgerungen allseitig zu entwickeln; sondern die Anschauung, das Leben des wissenschaftlichen Geistes stellt die Probleme, und diese lassen sich nicht wie Rechenaufgaben nach festem Schema lösen. Der deduktive Weg, der zu ihrer Lösung führt, ist nicht vorgezeichnet, er ist zu entdecken; die mannigfaltige Verknüpfungen mit einem Schlage überblickende Anschauung, Analogie und Erfahrung müssen uns dabei helfen. Es gibt, wie schon auf S. 31 erwähnt wurde, kein deskriptiv zu fassendes Merkmal für die aus gegebenen Prämissen beweisbaren Sätze; wir bleiben angewiesen auf die Konstruktion. Praktisch unmöglich ist es, so vorzugehen wie *Swifts* Gelehrter, den Gulliver im Lande Balnibarbi besucht: daß man nämlich in systematischer Ordnung, etwa nach der Anzahl der benötigten Schlußschritte, alle Folgerungen entwickelt und die „uninteressanten“ ausscheidet; wie denn auch die großen Werke der Weltliteratur nicht dadurch zustande gekommen sind, daß man aus den 25 Buchstaben alle möglichen „Kombinationen mit Wiederholung“ bis höchstens zur Anzahl 10^{10} gebildet, die sinnvollsten und schönsten davon ausgesucht und aufbewahrt hätte.

Nimmt man mit dem Raume (wie mit einer ihn erfüllenden Plastelinmasse) irgendeine stetige Deformation vor und versteht jetzt unter Geraden, Ebenen und kongruenten Figuren solche Linien, Flächen und Figuren, welche durch die Deformation aus wirklichen Geraden, wirklichen Ebenen, tatsächlich kongruenten Figuren hervorgegangen sind, so gelten offenbar auch für die neu eingeführten Begriffe die sämtlichen Tatsachen der Geometrie. Es ist also unmöglich, das System derjenigen Linien, welche durch irgendeine Raumdeformation aus den Geraden entstehen, vom System der Geraden begrifflich zu unterscheiden.

Dies führt uns auf die für die ganze Erkenntnistheorie fundamentale Idee der *Isomorphie*. Es liege vor ein System Σ_1 von Objekten (wie etwa die Punkte, Geraden, Ebenen der Geometrie) und gewisse zugehörige Beziehungen $R, R', \ldots$, die Grundrelationen. In einem zweiten System Σ_2 mögen Beziehungen obwalten, die, obwohl sie einen ganz andern Sinn haben, etwa durch gleiche Namen den Beziehungen $R, R', \ldots$ innerhalb des ersten Sachgebietes zugeordnet sind. Ist es dann möglich, gesetzmäßig die Elemente des Systems Σ_1 den Elementen des Systems Σ_2 eindeutig so zuzuordnen, daß immer solchen Elementen in Σ_1, zwischen denen die Beziehung R oder $R' \ldots$ besteht, Elemente in Σ_2 korrespondieren, zwischen denen die gleichbezeichnete Relation im Reiche Σ_2 statthat, so sind die beiden Sachgebiete *isomorph*. Die getroffene Zuordnung ist eine *isomorphe Abbildung* von Σ_1 auf Σ_2. Isomorphe Sachgebiete, kann man sagen, besitzen die gleiche *Struktur*. Jedem einschlägigen wahren Satze über Σ_1 (dessen Sinn allein auf Grund des Sinnes der Beziehungen $R, R', \ldots$ innerhalb Σ_1 verstanden werden kann) korrespondiert dann ein gleichlautender Satz über Σ_2, und umgekehrt; nichts kann über die Objekte in Σ_1 ausgesagt werden, was nicht auch in Σ_2 gültig wäre. So wird z. B. der Raum durch die Koordinatenkonstruktion des *Descartes* isomorph abgebildet auf das Operationsgebiet der linearen Algebra. Die bisherigen Betrachtungen drängen uns dazu, ein Axiomensystem aufzufassen als *logische Leerform möglicher Wissenschaften*. Eine inhaltliche Interpretation liegt vor, wenn für die Namen der Grundbegriffe eine Bedeutung aufgewiesen ist, zufolge deren die Axiome wahre Aussagen werden. Man könnte nun darauf verfallen, ein Axiomensystem vollständig zu nennen, wenn durch die Forderung der Gültigkeit der Axiome der Sinn der in sie eingehenden Grundbegriffe eindeutig fixiert wäre. Dieses Ideal ist aber nicht zu erfüllen; denn gewiß ist jede inhaltliche Interpretation, die aus einer vorliegenden durch isomorphe Abbildung hervorgeht, wiederum eine solche. Die endgültige Formulierung ist darum diese: *Ein Axiomensystem ist vollständig oder kategorisch, wenn irgend zwei inhaltliche Interpretationen desselben notwendig isomorph sind.* In diesem Sinne ist, wie man zeigen kann, die Vollständigkeit der von *Hilbert* aufgestellten geometrischen Axiome gewährleistet. Tatsächlich läßt sich leicht zeigen, daß ein diesen Axiomen genügender Raum dem algebraischen Modell isomorph ist, das die Descarte'sche analytische Geometrie liefert.

Eine Wissenschaft kann ihr Sachgebiet immer nur bis auf eine isomorphe Abbildung festlegen. Insbesondere verhält sie sich gegenüber dem „Wesen" ihrer Objekte ganz indifferent. Das, was die wirklichen Raumpunkte von Zahlentripeln oder andern Interpretationen der Geometrie unterscheidet, kann man nur *kennen* in unmittelbarer lebendiger Anschauung. Aber das Schauen ist nicht selige Ruhe in sich, aus der es niemals herauszutreten vermöchte, sondern drängt fort zum Zwiespalt und Wagnis der *Erkenntnis*; Schwärmerei aber ist es, von der Erkenntnis zu erwarten, daß sie ein tieferes Wesen als das der Anschauung offen daliegende — der Anschauung enthülle. Der Isomorphiegedanke bezeichnet die selbstverständliche unübersteigbare Schranke des Wissens. Auch für die metaphysischen Spekulationen über eine Welt der Dinge an sich hinter den Erscheinungen hat dieser Gedanke aufklärenden Wert. Denn es ist bei einer solchen Hypothese klar, daß die Erscheinungswelt der absoluten isomorph sein muß (wobei freilich die Zuordnung nur in der einen Richtung Ding an sich → Erscheinung eindeutig zu sein braucht); denn „wir sind, wenn verschiedene Wahrnehmungen sich uns aufdrängen, berechtigt, daraus auf Verschiedenheit der reellen Bedingungen zu schließen" (*Helmholtz*, Wissenschaftliche Abhandlungen II, S. 656). Wenn wir also auch die Dinge an sich nicht *kennen*, so *wissen* wir doch genau so viel über sie wie über die Erscheinungen. Derselbe Isomorphiegedanke klärt das Problem, welches *Leibniz*, veranlaßt durch *Hobbes*' nominalistische Theorie der Wahrheit, in dem Dialog über die Verknüpfung zwischen Dingen und Worten behandelt; *Leibniz* ringt offenbar damit, ihm Ausdruck zu geben (Philos. Schriften, ed. Gerhardt, VII, S. 190—193).

Durch die Aufdeckung isomorpher Beziehungen können alle Erkenntnisse, die in einem Gebiet gewonnen wurden, ohne weiteres auf die isomorphen Gebiete übertragen werden. Solchen Dienst leistet z. B. das Dualitätsprinzip in der ebenen projektiven Geometrie. Ihr einziger Relationsbegriff ist die Inzidenz von Punkt und Gerader (Punkt liegt auf Gerader, Gerade geht durch Punkt). Weil es möglich ist, die Punkte der Ebene eindeutig mit den Geraden so zu paaren, daß immer wenn ein Punkt P auf einer Geraden q liegt, die mit P gepaarte Gerade p durch den mit q gepaarten Punkt Q hindurchgeht, entsteht aus einem wahren Satz der projektiven Geometrie (bei Verwendung des richtungslosen Beziehungswortes inzident) sofort ein neuer, indem man die Worte „Punkt" und „Gerade“ vertauscht. *S. Lie* entdeckte, daß man die Geraden des (komplexen) Raumes den Kugeln eindeutig so zuordnen kann, daß sich schneidenden Geraden sich berührende Kugeln entsprechen. Aus allen Sätzen über sich schneidende Gerade erhält man durch sein Übertragungsprinzip Sätze über sich berührende Kugeln. Ein wichtiger Teil der analytischen Funktionentheorie, die sog. „Uniformisierung“, läßt sich am natürlichsten in der Sprache der *Bolyai-Lobatschewsky*schen Geometrie behandeln. Ist ein Leitungsnetz für Gleichstrom gegeben, bestehend aus einzelnen homogenen Drähten, die sich in Knotenpunkten verzweigen, und bezeichnet man als „Punkt“ eine willkürliche Stromverteilung, die jedem Draht s eine elektrische Stromstärke J_s zuordnet, so gelten die Gesetze des mit einem Zentrum O versehenen euklidischen Raumes von so viel Dimensionen, als das Leitungsnetz Drähte enthält. Der Zentralpunkt O wird dabei repräsentiert durch die Stromlosigkeit, für welche alle Stromstärken J_s verschwinden, und unter dem Quadrat des Abstandes eines „Punktes“ vom Zentrum ist die pro Zeiteinheit von der Stromverteilung entwickelte Joulesche Wärme zu verstehen. Diese Isomorphie hat keinen spielerischen Charakter, weil den einfachen und wichtigen geometrischen Begriffen dadurch die einfachen und wichtigen, das Stromnetz betreffenden physikalischen Begriffe zugeordnet werden. Z. B. ist die Grundaufgabe, bei gegebenen in die einzelnen Drähte eingefügten Spannungen die im Leitungsnetz auftretende Stromverteilung zu ermitteln, mit der geometrischen Aufgabe identisch, einen Punkt senkrecht auf eine gegebene Ebene zu projizieren. Ihre eindeutige Lösbarkeit ist damit sofort mathematisch sichergestellt und eine Rechenmethode an die Hand gegeben, die Lösung zu finden.

Die reine Mathematik ist nach moderner Auffassung allgemeine hypothetisch-deduktive Relationslehre, sie entwickelt die Theorie logischer Leerformen, ohne sich an die eine oder andere mögliche inhaltliche Interpretation zu binden. Vgl. über diese „*Formalisierung*“ als „einen Gesichtspunkt, ohne den von einem Verständnis mathematischer Methode nicht zu reden ist“, *Husserl*, Logische Untersuchungen I, §§ 67—72. „Die Bedingung zur Aufstellung einer allgemeinen Arithmetik“, erklärt schon *Hankel* in seiner 1867 erschienenen Theorie der komplexen Zahlen, S. 10, „ist daher eine von aller Anschauung losgelöste rein intellektuelle Mathematik, eine reine Formenlehre, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder, die Zahlen, verknüpft werden, sondern intellektuelle Objekte, denen aktuelle Objekte oder Relationen solcher entsprechen *können*, aber nicht *müssen*." Die Axiome werden zu *impliziten Definitionen* der in sie eingehenden Grundbegriffe. Es verbleibt dabei den Begriffen freilich ein Spielraum der Unbestimmtheit; die logischen Folgerungen aus den Axiomen sind aber gültig, wie dieser Spielraum bei einer inhaltlichen Interpretation auch ausgefüllt werden möge. Die reine Mathematik anerkennt nur eine Bedingung für die Wahrheit, diese freilich ist unerläßlich, die *Widerspruchslosigkeit*.

Vielleicht klingt schon in *Euklids* Bezeichnung für die Axiome: *αἰτήματα*, Postulate, diese moderne Einstellung an. *Leibniz* tut einige entschiedene Schritte zur Realisierung der *mathesis universalis* im angedeuteten und von ihm klar erfaßten Sinne. In den Rahmen seiner *Ars combinatoria* gehört vor allem das glänzendste Beispiel „rein intellektueller Mathematik", die *Gruppentheorie*. Eine endliche *Gruppe* G ist ein System endlich vieler Objekte, innerhalb dessen irgendwie eine Operation festgelegt ist, die aus je zwei (gleichen oder verschiedenen, in bestimmter Reihenfolge gesetzten) Dingen a, b ein Ding ab dieses Systems erzeugt. Die einzigen Forderungen oder Axiome sind:

das assoziative Gesetz $a(bc) = (ab)c$;

ist $a \neq b$ (a verschieden von b), so auch $ac \neq bc$, $ca \neq cb$.

Aus solchen geringfügigen Voraussetzungen entwickelt sich eine Fülle tiefer Zusammenhänge; und die Mathematik bietet eine erstaunliche Mannigfaltigkeit verschiedener „Interpretationen" dieses simplen Axiomensystems dar. Die Gruppe ist vielleicht der für die Mathematik des 19. Jahrhunderts am meisten charakteristische Begriff.

Die Methode der impliziten Definition ist auch innerhalb der Wissenschaften selbst, nicht bloß für ihre Grundlegung von Nutzen. Man schreibt einem „Stück", worunter ich hier ein geradlinig begrenztes Stück der Ebene verstehen will, einen *Flächeninhalt* zu; und man nimmt an, daß er den folgenden Forderungen Genüge leiste:

1. Der Flächeninhalt ist eine positive Zahl.
2. Zerlegt man ein Stück durch einen im Innern verlaufenden Streckenzug in zwei Teile, so ist der Flächeninhalt des Ganzen gleich der Summe der Flächeninhalte der Teile.
3. Kongruente Stücke haben gleichen Flächeninhalt.

Dies sind die wirklich wesentlichen Eigenschaften des Flächeninhaltes; aber sie enthalten keine explizite Definition des Begriffs. Doch zeigt sich, daß die Forderungen widerspruchsfrei sind, daß tatsächlich jedem Stück γ durch ein bestimmtes Verfahren eine positive Zahl $J(\gamma)$ als Flächeninhalt zugeordnet werden kann, welche den Forderungen 2. und 3. Genüge leistet. Die Forderungen determinieren den Begriff nicht eindeutig; ihnen genügen außer $J(\gamma)$ auch die Werte $c \cdot J(\gamma)$, wo c irgendeine von γ unabhängige positive Konstante bedeutet. Damit sind aber alle Möglichkeiten erschöpft. Die verbleibende, im konstanten Faktor sich ausdrückende Willkür kann nur durch Aufweisung eines individuellen Stücks, z. B. eines Quadrats, und die Festsetzung, daß ihm der Inhalt 1 zukommen soll, aufgehoben werden (Relativität der Größe). — Sehr schön setzt die Bedeutung der impliziten Definition aller Wissenschaften, nicht nur der Mathematik, *M. Schlick* in seiner Allgemeinen Erkenntnislehre (Berlin 1918, S. 30—37) auseinander. „Für die strenge, Schluß an Schluß reihende Wissenschaft ist der Begriff in der Tat gar nichts weiter als dasjenige, wovon gewisse Urteile ausgesagt werden können. Dadurch ist er mithin auch zu definieren." Ein geeignetes Anwendungsfeld dürfte außer den exakten Wissenschaften auch die Jurisprudenz sein.

Literatur

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. 2. Aufl. Berlin 1926.

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Mehrere Auflagen seit 1899.

D. Hilbert, Axiomatisches Denken. Mathematische Annalen 78 (1918).

M. Geiger, Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie. Augsburg 1924.

F. Gonseth, Les mathématiques et la réalité. Paris 1936.

II. Zahl und Kontinuum. Das Unendliche

5. Rationale Zahlen. Das Komplexe

Beim genetischen Aufbau des mathematischen Zahlenreichs nimmt man seinen Ausgang von den natürlichen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... Der erste Schritt, der zu tun ist, ist der Aufstieg von den natürlichen Zahlen zu den Brüchen. Die *Brüche* verdanken historisch ihre Entstehung dem Übergang vom Zählen zum *Messen.* Dem Messen liegt stets zugrunde ein Größengebiet, wie es z. B. die Strecken auf einer Geraden bilden. Hier herrscht 1. eine Beziehung der Gleichheit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ (Kongruenz), die den dafür aufgestellten Axiomen (S. 23) genügt, und 2. eine Operation, die aus irgend zwei Strecken $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ eine Strecke $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ erzeugt. Aus der Strecke $\boldsymbol{a}$ entsteht dann z. B. die Strecke $5\boldsymbol{a}$, indem man die Summe $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$ mit fünf Summanden $\boldsymbol{a}$ bildet. Damit ist der Anschluß des Messens an das Zählen vollzogen. Die Erklärung der Vervielfältigung kann scharf so gefaßt werden:

α) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

β) ist n eine natürliche Zahl, so entsteht $(n + 1)\,\boldsymbol{a}$ aus $n\boldsymbol{a}$ gemäß der Formel

$$(n+1)\,\boldsymbol{a} = (n\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}\,.$$

Im Gebiete der Strecken gestattet die Operation der Vervielfältigung eine eindeutige Umkehrung, die Teilung: es existiert bei gegebener Strecke $\boldsymbol{a}$ und natürlicher Zahl n eine und (im Sinne der Gleichheit) nur eine Strecke x, für welche $nx = \boldsymbol{a}$ ist; sie wird mit $\boldsymbol{a}/n$ bezeichnet. Die Operation der Teilung kann man mit der Vervielfältigung kombinieren. So entsteht z. B. $5\,\boldsymbol{a}/3$, das „5/3-fache" von $\boldsymbol{a}$. Das Bruchzeichen m/n dient als Symbol der zusammengesetzten Operation, so daß zwei Brüche gleich sind, wenn die beiden durch sie bezeichneten Operationen zum gleichen Resultat führen, auf welche Strecke $\boldsymbol{a}$ sie auch angewendet werden mögen. Die *Multiplikation* der Brüche bedeutet die Hintereinanderausführung der durch sie gekennzeichneten Operationen. Daß Brüche sich *addieren* lassen, beruht darauf, daß die (in ihrer Anwendung auf die willkürliche Strecke x) durch

$$\frac{mx}{n}+\frac{m^*x}{n^*}$$

ausgedrückte Operation durch einen einzigen Bruch repräsentiert werden kann.

Es ist nicht angebracht, für jedes Größengebiet eigene Brüche einzuführen; sondern, da ihre Gesetze unabhängig sind von der Natur des Größengebietes, ist es zweckmäßiger, sie rein arithmetisch zu definieren[1]). Das gelingt nun einfach dadurch, daß die obigen Überlegungen angewendet werden auf das Größengebiet der natürlichen Zahlen selbst. Daß in diesem Gebiet eine Beziehung wie

$$5x=3y$$

zwischen x und y sich bei gegebenem x nicht immer nach y auflösen läßt, spielt bei der Entwicklung der Theorie keine Rolle. So kommen wir zu folgender Fassung: „Zwei natürliche Zahlen m, n bestimmen einen Bruch m/n. Daß von irgend zwei natürlichen Zahlen x und y die zweite das m/n-fache der ersten sei, ist nur ein anderer Ausdruck für die Gleichung $mx = ny$." Das ist eine schöpferische Definition im Sinne von § 2. Zwei Brüche m/n, m^*/n^* sind gleich, wenn beliebige Zahlen x, y, welche in der Beziehung $mx = ny$ zueinander stehen, stets auch die Relation $m^*x = n^*y$ erfüllen, und umgekehrt. Die Regeln für das Rechnen mit natür-

[1]) Dies deckt sich mit der ältesten mathematischen Tradition, der der Sumerer. Erst nach der Entdeckung des Irrationalen gaben die Griechen den algebraischen Weg auf, nachdem sie gezwungen sind, algebraische Tatsachen geometrisch auszudrücken. Das nachklassische Abendland, teils unter dem Eindruck der algebraischen Leistungen der Araber, kehrte diese Entwicklung um. Indessen gab es vom modernen Standpunkt aus wenig Berechtigung alle Größen unter einen universellen Zahlenbegriff zu stellen, ehe Dedekind der Analyse des Irrationalen von Eudoxos seine konstruktive Wendung gab (vgl. § 7).

lichen Zahlen gestatten, dieses transfinite Kriterium, das seinem Wortlaut nach ein Durchprobieren aller möglichen Zahlen x, y fordert, durch das finite zu ersetzen:

$$(K) \qquad m \cdot n^* = n \cdot m^*.$$

Darum liegt der besondere Fall der Definition durch Abstraktion vor: die Gleichheit der Brüche m/n, m^*/n^* kann direkt durch (K) erklärt werden, wenn man sich zuvor davon überzeugt hat, daß diese Relation eine Äquivalenz ist. Die Einführung der Brüche als „ideale Elemente" kann auch ohne Rücksicht auf die Anwendungen von rein arithmetischem Gesichtspunkt aus dadurch motiviert werden, daß bei geeigneter Ausdehnung der Zahloperationen auf dieselben die wichtigsten arithmetischen Axiome bestehen bleiben und außerdem die Umkehrbarkeit der Multiplikation, die Möglichkeit des Dividierens, erzwungen wird, welche in der Arithmetik der natürlichen Zahlen nur ausnahmsweise stattfindet.

Wendet man den gleichen Gedanken von neuem an, um auch die Umkehrbarkeit der Addition zu erzwingen, so gelangt man von den Brüchen zu den (die 0 und das Negative einschließenden) *rationalen Zahlen*. (Freilich ein schwerwiegendes Opfer muß man dabei bringen: die Möglichkeit der Division kann nicht gerettet werden für den Divisor 0.) Hier treten nirgendwo logische Dunkelheiten oder philosophische Schwierigkeiten auf. Eine viel ernstere Angelegenheit ist der Ausgangspunkt, das System der natürlichen Zahlen, und das Irrationale, der Übergang von den rationalen zum Kontinuum der reellen Zahlen. Ist aber einmal diese Stufe erklommen, so führt das Weiterschreiten zu den komplexen und hyperkomplexen Zahlen an keinen Abgründen mehr vorbei. Zur Einführung der *komplexen Zahlen* hat man nur zu beschreiben, wodurch eine einzelne solche Zahl gegeben wird und wie mit ihnen zu operieren ist. Sie wird gegeben durch ihre beiden Komponenten; wir können also geradezu sagen, unter komplexer Zahl sei jedes reelle Zahlenpaar (α, β) zu verstehen (*Hamilton* 1837). Die Operationsregeln wollen wir hier nicht explizite hersetzen. Nach ihnen spielt im komplexen Gebiet $(1, 0) = e$ die Rolle der Einheit, weil ihre Multiplikation mit jeder komplexen Zahl (α, β) diese Zahl (α, β) reproduziert. Und $(0, 1)$ ist jene imaginäre Einheit i, welche der Gleichung $i \cdot i = - e$ genügt. Der innere Grund für die Festsetzungen ist wiederum der, daß sie die Gültigkeit der formalen Rechengesetze auf die komplexen Zahlen, die reellen Zahlenpaare übertragen. Von dem mystischen Geruch, in dem lange Zeit die imaginären Größen standen[1]), ist nichts übrig geblieben. Von den komplexen kann man zu den *hyperkomplexen Zahlen* aufsteigen mit 3 und mehr Komponenten. Aber es ließ sich allgemein zeigen, daß wie auch die Addition und Multiplikation in ihrem Gebiet definiert werden mögen, die Geltung aller Rechengesetze nicht aufrechterhalten werden kann. Insofern bezeichnen die komplexen Zahlen eine natürliche Grenze für die Erweiterung des Zahlbegriffs. Dennoch sind auch hyperkomplexe Zahlsysteme in der Mathematik von Bedeutung; so die vierkomponentigen *Quaternionen*, welche von den Rechengesetzen nur das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht erfüllen, als geeignetes Hilfsmittel zur Beherrschung der Drehungen eines starren Körpers im Raum.

Statt das Zahlenreich genetisch aufzubauen, kann man die Arithmetik auch auf ein Axiomensystem gründen. Die Genesis dient dann lediglich dazu, seine Widerspruchsfreiheit auf die Widerspruchsfreiheit der für die natürlichen Zahlen geltenden Axiome zurückzuführen. Die *arithmetischen Axiome* zerfallen in zwei Gruppen, die algebraischen und die Größen-Axiome. Die algebraische Gruppe handelt von den Operationen der Addition und Multiplikation. Sie enthält die formalen Rechengesetze (wie $a + b = b + a$), fordert die Existenz einer 0 und einer 1 mit den Eigenschaften

$$a+0=0+a=a, \qquad 1\cdot a=a\cdot 1=a$$

und die Umkehrbarkeit der Addition und der Multiplikation (mit Aus-

---

[1]) *Huyghens* erklärt z. B. 1674 (s. *Leibniz*, Math. Schriften, ed. Gerhardt II, S. 15) anläßlich einer komplexen Formel: *Il y a quelque chose de caché là-dedans, qui nous est incompréhensible.* Selbst *Cauchy* hat 1821 noch recht unklare Vorstellungen über das Operieren mit komplexen Größen. Aber das Negative verursachte seinerzeit nicht viel weniger Kopfzerbrechen. Betreffs der Regel: minus mal minus gleich plus, sagt *Clavius* 1612: *debilitas humani ingenii accusanda (videtur), quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit.* Noch *Descartes* bezeichnet, dem Brauch der damaligen Zeit gemäß, die negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung als falsche Wurzeln. — Die noch heute zuweilen gehörte Erklärung, i sei diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert -1 ergibt, ist, solange nur die reellen Zahlen zur Verfügung stehen, als Erklärung natürlich der reinste Unsinn; sie enthält lediglich die Aufforderung, den Zahlbegriff so zu erweitern und den Sinn der Multiplikation auf das erweiterte Gebiet so auszudehnen, daß die gewünschte Gleichung zustande kommt.

nahme der Division durch 0). Die Größenaxiome (die im Gebiet der komplexen Zahlen außer Kraft gesetzt sind) handeln von der Beziehung $a > b$ (a ist größer als b). Man vergleiche die Tabelle in *Hilberts* „Grundlagen der Geometrie".

Literatur

W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions. Dublin 1853.
H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlen. Leipzig 1867.
D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie.
O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung. Leipzig 1914.

6. Die natürlichen Zahlen

„Die ganze Zahl schuf der liebe Gott; alles übrige ist Menschenwerk" lautet ein viel zitierter Ausspruch von *Kronecker*. In den natürlichen Zahlen stellt sich das Problem der Erkenntnis in seiner schlichtesten Form. Nehmen wir auch hier das rein Mathematische vorweg!

Die Zahlenreihe hebt an mit der 1 und wird erzeugt durch einen Prozeß, der immer aus einer schon gewonnenen Zahl die nächstfolgende hervortreibt; niemals kehrt im Fortschreiten eine schon dagewesene Zahl wieder. Ein die Zahlen betreffender allgemeiner Begriff kann daher nur gewonnen werden durch *„vollständige Induktion"*, indem man nämlich angibt, α) was er für die erste Zahl 1 bedeutet, und β) wie er sich von einer beliebigen Zahl n auf die nächstfolgende n' ($= n + 1$) überträgt. Beispiele: Die Definition von na im vorigen Paragraphen. Die Begriffe gerade und ungerade: α) 1 ist ungerade; β) n' ist gerade oder ungerade, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Der allgemeine Begriff der Addition $a + n$ zweier natürlichen Zahlen a und n:

$$\alpha)\ a+1=a'; \qquad \beta)\ a+n'=(a+n)'.$$

Was von den Begriffen, gilt analog von den Beweisen. Mit Hilfe dieser Methode der Definition und des Beweises durch vollständige Induktion, der Definition und des Schlusses von n auf $n + 1$, wie sie auch genannt werden, läßt sich die Theorie der natürlichen

Zahlen vollständig aufbauen. Jener Schluß bringt in die mathematische Beweisführung ein ganz neues und eigenartiges Moment hinein, das die Aristotelische Logik noch nicht kennt, und ist die eigentliche Seele der mathematischen Beweiskunst. Explizite ausgesprochen wurde, wie es scheint, das Prinzip der vollständigen Induktion erst von *B. Pascal* (1654) und *Jakob Bernoulli* (1686).

Bei der eben angedeuteten Begründung der Zahlentheorie ist die *Reihung* der Zahlen das Wesentliche, sie treten primär als *Ordinalzahlen* auf und sind nur durch ihre Stellung in der Reihe gekennzeichnet. Mit Recht sagt daher *Schopenhauer* (Vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, § 38) von dieser Auffassung des Zahlbegriffes: „Jede Zahl setzt die vorhergehenden als Gründe ihres Seins voraus: zur *zehn* kann ich nur gelangen durch alle vorhergehenden ..." Das bekannte, auf einen vorgelegten Inbegriff von Gegenständen angewandte Zählverfahren liefert dann eine bestimmte natürliche Zahl als *Anzahl* der Elemente des Inbegriffs. Durch das Zählverfahren werden die Elemente des Inbegriffs selber in eine geordnete Reihe gebracht (erstes zweites, drittes, ...); es bedarf einer besonderen Überlegung, um die fundamentale Tatsache allgemein sicherzustellen, daß das Resultat der Durchzählung unabhängig ist von der befolgten Anordnung. Erst dadurch wird der Begriff der *Kardinalzahl* auf sichere Füße gestellt. Man vergleiche etwa die Darstellung bei *Helmholtz*, Zählen und Messen (Wissenschaftliche Abhandlungen III, S. 356; ferner *L. Kronecker*, Werke III 1, S. 249).

Es ist viel darüber gestritten worden, ob nicht umgekehrt die Kardinalzahl das Erste und die Ordinalzahl der sekundäre Begriff sei. Den Begriff der Anzahl einer Menge muß man, wenn die Kardinalzahl unabhängig von einer Anordnung eingeführt werden soll, wie auf S. 23 durch Abstraktion definieren. Es ist diese Definition nicht einmal auf endliche Mengen beschränkt; die an sie sich knüpfende Theorie der unendlichen Kardinalzahlen hat *G. Cantor* im Rahmen seiner allgemeinen Mengenlehre entwickelt. Aber die Möglichkeit der Paarung, von der im Kriterium der Gleichzahligkeit die Rede ist, läßt sich nur prüfen, wenn die Zuordnungsakte einer nach dem andern, in geordneter zeitlicher Folge, vorgenommen und damit die Elemente beider Mengen selber geordnet werden. Reißt man die Vergleichung zweier Mengen abstraktiv auseinander in Zahlbestimmung jeder Menge und nachfolgenden Vergleich der Zahlen, so ist es also unerläßlich, die einzelne Menge selber zu ordnen durch Aufweisung eines Elementes nach dem andern in der Zeit (wie es ohnehin nötig ist, damit ein Inbegriff individuell gegeben sei; und nur von solchen Inbegriffen handeln die Zahlen, deren wir uns im täglichen Leben bedienen). Daher scheint es mir unbestreitbar, daß die *Ordinalzahl das Primäre* ist. Die moderne mathematische Grundlagenforschung, welche die dogmatische Mengenlehre wieder zerstört hat, bestätigt dies durchaus.

Ein weiterer Streitpunkt ist der, ob die Zahlen selbständige ideale Objekte sind oder ob die Zahlentheorie es allein mit den konkreten *Zahlzeichen* zu tun hat, „deren Gestalt unabhängig von Ort und Zeit und von den besonderen Bedingungen der Herstellung des Zeichens sowie von geringfügigen Unterschieden in der Ausführung sich von uns allgemein und sicher wiedererkennen läßt" (*Hilbert*). So z. B. *Helmholtz* (Zählen und Messen, a.a.O., S. 359): „Ich betrachte die Arithmetik, oder die Lehre von den reinen Zahlen, als eine auf rein psychologischen Tatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird. Die Arithmetik untersucht namentlich, welche verschiedene Verbindungsweisen dieser Zeichen (Rechenoperationen) zu demselben Endergebnis führen." Eine ganz konsequente Durchführung dieses Standpunktes, die auch für die dagegen gerichtete Kritik von *Frege* (Grundgesetze der Arithmetik, 1893) unangreifbar ist, hat erst neuerdings *Hilbert* gegeben (vgl. § 10); hier ist von „Möglichkeit" gar nicht mehr die Rede, sondern es wird nirgendwo über die tatsächlich in concreto vorliegenden Zeichen hinausgegangen. Als geeignete Zeichen bieten sich aufeinanderfolgende Striche („Einsen") dar. Höre ich eine Folge von Tönen, so mache ich bei jedem Ton einen Strich, indem ich die Striche einen hinter den anderen setze / / / /. Ein zweites Mal verfahre ich ebenso. Könnte ich die Gleichheit oder Verschiedenheit der „Gestalt" der beiden aus Strichen bestehenden Zeichen unmittelbar erkennen, so wäre damit die Zahlvergleichung gewonnen. Die Repräsentation durch Striche hat hier die Bedeutung, das Gegebene unter Erhaltung der Zahl auf eine solche „Normalform" zu bringen, daß Gestaltverschiedenheit ohne weiteres Zahlunterschied anzeigt. (Für ein direkt gegebenes gestaltetes Ganze, über dessen Verhältnis zu seinen als Einheit aufgefaßten Teilen die Zahlaussage handelt, bedeutet der gestaltliche Unterschied von einem andern Ganzen im allgemeinen noch keinen Unterschied der Zahl; Beispiel ⁚·⁚ und ⁛. Man spricht von einem Akt des *Kolligierens* als Grundlage der Anzahlbestimmung. Mir scheint, daß man bei Anwendung des symbolischen Zählverfahrens auf ein Ganzes gestaltlich verknüpfter Einheiten nicht erst durch Auflösung der Verknüpfung einen bloßen „Inbegriff" zu abstrahieren braucht, noch einzelne für sich gegebene Elemente, wie aufeinanderfolgende Klänge, zu einem Inbegriff „kolligieren" müßte. Die Aussage: „Das waren soviel / / / / Klänge" ist in sich durchaus verständlich, und es ist unnötig, nach einem Subjekt „Inbegriff der gehörten Klänge" zu fahnden.) Das unmittelbare Erkennen der Gleichheit oder Verschiedenheit zweier aus hintereinander gesetzten Strichen bestehender Zeichen ist aber nur bei den niedersten Anzahlen möglich. Allgemein muß man so verfahren, daß man das zweite Mal die während der ersten Serie gesetzten Striche wieder benutzt, etwa einen nach dem andern durchstreicht; dazu ist es erforderlich, daß das zuerst gesetzte Zeichen *standhält*. Aber prinzipiell sind für die Begründung eines solchen Urteils wie „Jetzt waren es mehr Töne als das erste Mal" Zeichen entbehrlich, wenn die Töne der ersten Serie (die etwa fallende Tonhöhe besitzen) in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge beim Anhören der zweiten Folge *reproduziert* werden können. Unentbehrlich werden sie erst, wenn die Vergleichung auseinander gerissen wird in zwei Zahlbestimmungen („das erste Mal wares es 4, jetzt waren es 5 Klänge; 5 ist größer als 4") und dadurch ein Teil der geistigen Manipulation („5 ist größer als 4") auf die standhaltenden, zugleich zur Aufbewahrung und zur Mitteilung bequemen Zeichen verschoben wird. *Nicht die Zahlvergleichung also, aber die Zahlbestimmung hat wesenhaft signativen Charakter.* „Das waren 4 Klänge" ist ohne Bezugnahme auf ein Zeichen nicht zu verstehen. Will man nun doch von Zahlen als Begriffen oder idealen Gegenständen reden, so haben sie jedenfalls keine selbständige Existenz, sondern ihr Sein erschöpft sich in der funktionellen Rolle, die sie spielen, und ihren Beziehungen des Mehr und Weniger. (Gewiß sind sie keine Begriffe im Sinne der Aristotelischen Abstraktionstheorie.)

Die Verwendung mehrerer *Ziffern* und das (von den Indern konsequent auch für die Schrift ausgebildete) *Positionssystem* gestattet die rasche Entscheidung des Größer und Kleiner für weit höhere Zahlen als die einfachen, aus lauter hintereinander gesetzten Einsen bestehenden Zahlzeichen; es ist ihm praktisch gewaltig, doch nicht prinzipiell überlegen. Die Grundzahl des Zahlsystems, als welche uns die Zehn dient, ist in verschiedenen Kulturen verschieden. Die indische, vor allem die buddhistische Literatur schwelgt in den Möglichkeiten, durch das Positionssystem, d. h. durch Verbindung von Addition, Multiplikation und Potenzieren ungeheure Zahlen eindeutig zu benennen. Trotz aller wuchernden Phantastik ist doch etwas wahrhaft Großes darin lebendig; der Geist fühlt zum ersten Mal ganz seine Kraft, durch das *Symbol* über die Grenzen dessen hinauszufliegen, was sich anschaulich vollziehen läßt. Etwas Verwandtes finden wir bei den Griechen nur in der spätesten Zeit, in *Archimedes*' Schrift an *Gelon* „Über die Sandzahl"; und auch hier redet nicht die Lust an dem in Stufen sich öffnenden Unendlich, sondern an der rationalen Bewältigung des Uferlosen.

Was das *Verhältnis der Zahl zu Raum und Zeit* betrifft, so dürfen wir sagen: die Zeit als Form des reinen Bewußtseins ist wesenhafte, nicht zufällige Voraussetzung für die geistigen Operationen, in denen der Sinn der Zahlaussage gründet. Nicht aber der Raum, wie von manchen Philosophen (z. B. *Hobbes*) behauptet wurde; wennschon standhaltende Zeichen von räumlicher Gestalt das geeignetste Mittel sind, die Zahl vom Gezählten abzulösen, aufzubewahren, mitzuteilen und dem Umgehen mit Zahlen Sicherheit zu verleihen. Vor allem *Kant* hat die Bindung des Zahlbegriffs an die Zeit hervorgehoben; es wäre aber natürlich viel zu weit gegangen, wenn man die Arithmetik in demselben Sinne als die Lehre von der Zeit hinstellen wollte, wie die Geometrie Lehre vom Raum ist.

An zwei konkret vorliegenden Zahlzeichen m und n läßt sich schildern, was die Aussage $m + n = n + m$ bedeutet, ohne irgendwelche andere Zahlen zu „erzeugen". Man vermag auch einzusehen, daß diese Aussage in einem beliebigen konkret vorliegenden Fall stets zutreffe. Etwas Neues aber geschieht, wenn ich die aktuell vorkommenden Zahlzeichen einbette in die *Reihe aller möglichen Zahlen*, welche durch einen Erzeugungsprozeß entsteht gemäß dem Prinzip, daß aus einer vorhandenen Zahl stets durch Hinzufügung der Eins eine neue, die nächstfolgende, erzeugt werden kann. Hier wird das Seiende projiziert auf den Hintergrund des *Möglichen*, einer nach festem Verfahren herstellbaren geordneten, wenn auch ins Unendliche offenen Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten. Dies ist der Standpunkt, den wir am Anfang des gegenwärtigen Paragraphen bei der mathematischen Begründung der Arithmetik durch das Prinzip der vollständigen Induktion einnahmen. Hierauf stützen wir uns, wenn wir von einer Billion $= 10^{12}$ Papiermark sprechen. Denn mittels Definition durch vollständige Induktion gewinnen wir aus dem arithmetischen Urprozeß, der n in $n + 1$ verwandelt, die Operation der Multiplikation mit 10 und dann durch ihre 12malige Anwendung, ausgehend von 1, die gewünschte Zahl 10^{12}. Die Zahlzeichen 10 und 12 können wir dabei in Strichen hinschreiben; für 10^{12} geschah es niemals, und doch „fingieren" wir eine solche Zahl.

Schon bei der Zahl treten uns also die folgenden Grundzüge des *konstruktiven Erkennens* entgegen:

1. Das Resultat gewisser geistiger Operationen am Gegebenen, die für allgemein ausführbar gelten, wird, sofern es durch das Gegebene eindeutig bestimmt ist, als ein dem Gegebenen an sich zukommendes Merkmal aufgestellt (selbst wenn jene Operationen, die seinen Sinn begründen, nicht wirklich ausgeführt werden).

2. Durch Einführung von Zeichen wird eine Aufspaltung der Urteile vollzogen und ein Teil der Operationen durch Verschiebung auf die Zeichen vom Gegebenen und seinem Fortbestand unabhängig gemacht. Dadurch tritt das freie Schalten mit Begriffen ihrer Anwendung, die Ideen treten relativ selbständig der Wirklichkeit gegenüber.

3. Sie werden in ihrem aktuellen Vorkommen nicht einzeln herausgehoben, sondern auf den Hintergrund einer nach festem Verfahren herstellbaren geordneten, ins Unendliche offenen Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten projiziert.

Die Erkenntnis hat hier nicht haltgemacht. Der Sprung ins Jenseits aber wird vollzogen, wenn nun die ins Unendliche offene, gesetzmäßig entstehende Reihe der Zahlen zu einem geschlossenen Inbegriff an sich existierender Gegenstände gemacht wird. Erst wenn dies geschieht, wird die Statuierung der Zahlen als ideale Objekte gefährlich. Der Glaube ans Absolute ist tief in unsere Brust gepflanzt; kein Wunder, daß die Mathematik in aller Naivität den Sprung vollzog. Wer die an die unendliche Allheit der Zahlen appellierende Definition „n ist eine gerade oder ungerade Zahl, je nachdem es eine Zahl x gibt, für welche $n = 2x$ ist oder nicht“ als sinnvoll hinnimmt (etwas anderes ist die oben erwähnte Definition von gerade und ungerade durch vollständige Induktion), steht bereits am andern Ufer: das Zahlsystem ist ihm ein Reich absoluter Existenzen geworden, das „nicht von dieser Welt“ ist und von welchem nur tropfenweise ein Abglanz in unser schauendes Bewußtsein fällt. Um die Berechtigung dieses Standpunktes dreht sich der heute von neuem heftig entbrannte Kampf um die Grundlagen der Mathematik; er ist symptomatisch für alles Erkennen und wird auf dem Felde der Mathematik noch am ehesten zu klaren Entscheidungen führen.

LITERATUR

R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888; 3. Aufl. 1911; 9. Aufl. 1961.

G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884; Neudruck 1934. — Grundgesetze der Arithmetik. 2 Bände. Jena 1893—1903.

E. Husserl, Philosophie der Arithmetik. Halle 1891.

7. Das Irrationale und das Unendlichkleine

In einer anderen Form als in der Reihe der ganzen Zahlen tritt uns das Unendliche entgegen an dem unendlicher Teilung fähigen *Kontinuum*, insbesondere dem Kontinuum der Zeit und des Raumes. Hier ist die zweite offene Stelle im oben geschilderten Aufbau des mathematischen Zahlenreiches. Das Altertum hat uns zum Problem des Kontinuums zwei wichtige Beiträge hinterlassen: a) eine weitgehende Analyse der mathematischen Frage, wodurch die einzelne Stelle im Kontinuum fixiert werden kann, und b) die Aufdeckung der philosophischen Paradoxien, welche im anschaulichen Wesen des Kontinuums liegen.

a) Die reine Geometrie der Griechen, sich über die Inexaktheit des sinnlich Gegebenen hinausschwingend, wendet die Idee der Existenz (nicht nur auf die natürlichen Zahlen, sondern auch) auf die Punkte des Raumes an. Die Entdeckung des Irrationalen an dem Verhältnis $\sqrt{2}$ zwischen Seite und Diagonale eines Quadrates lehrte, daß die Brüche nicht die allein möglichen Maßzahlen eines Streckenverhältnisses, nicht die einzigen „reellen Zahlen" sind. In den Platonischen Dialogen spürt man den tiefen Eindruck, den diese mathematische Entdeckung auf das entstehende wissenschaftliche Bewußtsein der damaligen Zeit gemacht hat. Unabhängig von den besonderen geometrischen Konstruktionen, die zunächst einzelne Irrationalitäten wie $\sqrt{2}$ lieferten, erkannte *Eudoxos* die allgemeinen Grundlagen des Phänomens. 1. An Stelle der unhaltbar gewordenen Kommensurabilität setzt er das Axiom: Sind a und b irgend zwei Strecken, so läßt sich a immer so oft zu sich selbst hinzufügen, etwa $n$mal, bis die Summe na größer als b geworden ist. Dies bedeutet, daß alle Strecken von vergleichbarer Größenordnung untereinander sind, daß es *weder ein aktual Unendlichkleines noch ein aktual Unendlichgroßes* im Kontinuum gibt. 2. Und wodurch ist das einzelne Streckenverhältnis gekennzeichnet? *Eudoxos* antwortet: Zwei Streckenverhältnisse $a:b$, $a':b'$ sind einander gleich, wenn für beliebige natürliche Zahlen m und n, welche die in der ersten Zeile stehende Beziehung erfüllen, immer auch die darunter gesetzte Relation der zweiten Zeile gilt:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} na > mb \\ na' > mb' \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} na = mb \\ na' = mb' \end{cases} \qquad \text{(III)}\ \begin{cases} na < mb \\ na' < mb' \end{cases}$$

Kennzeichnend für die einzelne reelle Zahl α ist demnach der Schnitt, den sie im Gebiete der rationalen Zahlen erzeugt, durch die Einteilung aller Brüche m/n in die drei Klassen derjenigen, welche (I) kleiner als α, (II) gleich α und (III) größer sind als α. Die mittlere Klasse ist entweder leer oder enthält nur einen einzigen Bruch. Das erste Axiom garantiert dafür, daß nicht zwei verschiedene Strecken zur festgewählten Einheitsstrecke in demselben Verhältnis stehen können. Auf diesem Fundament errichtet sich auch bei *Euklid* die Proportionenlehre; *Archimedes* gründet darauf seine allgemeine Exhaustionsmethode.

Erst im 19. Jahrhundert führt die moderne Mathematik das Problem zu Ende. Für *Eudoxos* ist die reelle Zahl gegeben als das Verhältnis zweier vorliegender Strecken; was für Streckenverhältnisse existieren, darüber sollten uns also die Axiome der Geometrie unterrichten. Nun ist es aber in der euklidischen Geometrie nicht möglich (durch Konstruktion mit Lineal und Zirkel) zu einer vorgelegten Strecke 1 die Strecke $\sqrt[3]{2}$ nachzuweisen, welche das Delische Problem der Würfelverdoppelung löst, oder die Strecke π, welche gleich dem Umfange des Kreises vom Durchmesser 1 ist. Dennoch sind wir von ihrer Existenz auf Grund von Stetigkeitsschlüssen überzeugt: wenn die Würfelkante von 1 bis zur doppelten Größe ansteigt, wächst das Würfelvolumen stetig von 1 bis 8 und muß deshalb einmal den Wert 2 passieren; die Strecke π können wir von unten und oben her mit beliebiger Genauigkeit approximieren durch die euklidisch konstruierbaren Umfänge der dem Kreise ein- und umbeschriebenen regulären 6, 12, 24, ...-Ecke. Wir drehen also den Spieß um: *Jeder willkürlich vorgegebene Schnitt* im Gebiet der rationalen Zahlen, d. i. jede irgendwie bewerkstelligte Aufteilung aller rationalen Zahlen in drei Klassen I, II, III bestimmt eine reelle Zahl. (Die einzigen Forderungen, die erfüllt sein müssen, sind diese: weder I noch III ist leer; II enthält höchstens einen einzigen Bruch, I keinen größten und III keinen kleinsten; jede Zahl aus I ist kleiner als alle in II und III enthaltenen Brüche, jede Zahl der Klasse III größer als die in I und II.) Wir haben — nach *Dedekind*, Stetigkeit und Irrationalzahlen, 1872 — keinen Anlaß, nur einen Teil dieser Schnitte als reelle Zahlen zuzulassen. Und in der Geometrie postulieren wir dann als Axiom (Dedekindsches Axiom) die Existenz derjenigen Strecke, welche zu der vorgegebenen Einheitsstrecke e in dem arithmetisch durch den Schnitt festgelegten Verhältnis steht. Da nach *Eudoxos* umgekehrt das Verhältnis einer beliebigen Strecke a zur Einheitsstrecke einen Schnitt bestimmt, verbürgt das Dedekindsche Axiom die *Vollständigkeit* der geometrischen Elemente: das System der Punkte ist, bei Aufrechterhaltung der sämtlichen Axiome einschließlich des Eudoxischen, keiner Erweiterung mehr fähig *(Hilbert)*. In dieser logischen Vollständigkeit spiegelt sich die anschauliche Lückenlosigkeit der Punkte im Raume wieder. Mit dem Dedekindschen Zahlbegriff macht sich die Analysis unabhängig von der Geometrie; erst so ist sie fähig zur Analyse der Stetigkeit und liefert der Geometrie die Mittel zum Beweise der Stetigkeitssätze von folgender Art: Eine stetige Linie, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt verbindet, trifft die Peripherie. Daß sie bei *Euklid* noch der näheren Begründung entbehren, darauf hat schon *Leibniz* im Hinblick auf die erste bei *Euklid* vorkommende Konstruktion, die des gleichseitigen Dreiecks ABC aus den Punkten A und B, aufmerksam gemacht: Man schlägt um A einen Kreis, der durch den Punkt B geht, um B einen Kreis, der durch A geht; es werde nicht bewiesen, daß diese Kreise einen Punkt C gemeinsam haben. — Ein dem Schnitt gleichwertiges Mittel zur Festlegung der reellen Zahl ist die *unendliche Folge* ineinander eingeschachtelter rationaler Intervalle $a_n b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, deren Länge $b_n - a_n$ mit unbegrenzt wachsendem Index n gegen 0 konvergiert (vgl. das Beispiel π). Da der Bruch logisch nicht komplizierter ist als die natürliche Zahl — er ist ja durch zwei natürliche Zahlen, Zähler und Nenner bestimmt —, können wir das Fazit der historischen Entwicklung des Problems *a*) mit den Worten ziehen:

Objekt der Zahlentheorie sind die einzelnen natürlichen Zahlen, Objekt der Kontinuumslehre die möglichen Mengen (oder die unendlichen Folgen) natürlicher Zahlen.

b) Das Wesen des Kontinuums kennzeichnet scharf ein uns überliefertes Fragment des *Anaxagoras:* „Im Kleinen gibt es kein Kleinstes, sondern es gibt immer noch ein Kleineres. Denn was ist, kann durch keine noch so weit getriebene Teilung je aufhören zu sein.“ Das Kontinuum ist nicht aus diskreten Elementen zusammengesetzt, die „voneinander abgetrennt, wie mit dem Beile voneinander abgehauen" sind. Der Raum ist nicht nur in dem Sinne unendlich, daß man in ihm nirgendwo an ein Ende kommt; sondern an jeder Stelle ist er sozusagen nach innen hinein unendlich, ein Punkt läßt sich nur durch einen ins Unendliche fortschreitenden Teilungsprozeß von Stufe zu Stufe genauer und genauer fixieren. Das steht in Kontrast zu dem für die Anschauung ruhenden fertigen Dasein des Raumes. Diesen Charakter teilen der kontinuierliche Raum und die kontinuierlich sich abstufenden Qualitäten den Dingen der Außenwelt mit: ein wirkliches Ding kann niemals adäquat gegeben sein, in einem ins Unendliche fortschreitenden Prozeß immer neuer und genauerer Erfahrungen entfaltet es seinen „inneren Horizont"; es ist, wie *Husserl* betont, eine Grenzidee im Kantischen Sinne. Daher ist es unmöglich, das wirkliche Ding als ein seiendes, geschlossen und in sich vollendet, zu setzen. So treibt das Kontinuumproblem zum erkenntnistheoretischen *Idealismus*; unter anderen bezeugt *Leibniz*, daß das Suchen nach einem Ausweg aus dem „Labyrinth des Kontinuum" es war, was ihn zuerst zu der Auffassung von Raum und Zeit als Ordnungen der Phänomene hingeführt hat. „Daraus, daß der mathematische Körper sich nicht in erste Grundmomente auflösen läßt, folgt ohne weiteres, daß er schlechterdings nichts Reales, sondern nur ein gedankliches Gebilde ist, das nichts als eine Möglichkeit von Teilen, keineswegs aber etwas Wirkliches bezeichnet" (Briefwechsel zwischen *Leibniz* und *de Volder;* Philos. Schr., ed. Gerhardt, II, S. 268).

Im Gegensatz zu diesem Wesen des Kontinuums konzipiert *Leibniz*, da er, anders als *Kant*, metaphysisch den Phänomenen ein Fundament in einer Welt absoluter Substanzen geben muß, die Idee der *Monade:* „In dem Ideellen oder dem Kontinuum geht das Ganze den Teilen voraus ... Die Teile sind hier nur potentiell; in den wirklichen (d. i. substantiellen) Dingen aber geht das Einfache den Aggregaten voraus und die Teile sind aktuell und vor dem Ganzen gegeben. Diese Erwägungen heben die Schwierigkeiten in Betreff des Kontinuums: Schwierigkeiten, die nur dann entstehen, wenn man das Kontinuum als etwas Reales ansieht, das an sich vor aller Teilung unsererseits wirkliche Teile besitzt, und wenn man die Materie für eine Substanz hält" (Brief an *Remond*; Philos. Schr. III, S. 622).

Die Unmöglichkeit, das Kontinuum als ein starres Sein zu fassen, kann nicht prägnanter formuliert werden als durch das bekannte Paradoxon des *Zenon* von dem Wettlauf zwischen Achilleus und der Schildkröte. Der Hinweis darauf, daß die sukzessiven Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots,$$

$1 - 1/2^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) nicht über alle Grenzen wachsen, sondern gegen 1 konvergieren, durch den man heute das Paradoxon zu erledigen meint, ist gewiß eine wichtige, zur Sache gehörige und aufklärende Bemerkung. Wenn aber die Strecke von der Länge 1 wirklich aus unendlich vielen Teilstrecken von der Länge $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... als „abgehackten" Ganzen besteht, so widerstreitet es dem Wesen des Unendlichen, des „Unvollendbaren", daß Achilleus sie alle schließlich durchlaufen hat. Gibt man diese Möglichkeit zu, so wäre nicht einzusehen, warum nicht eine Maschine auch eine unendliche Folge distinkter Entscheidungsakte in endlicher Zeit zum Abschluß bringen könnte, indem sie etwa das erste Resultat nach $^1/_2$ Minute lieferte, das zweite $^1/_4$ Minute darauf, das dritte $^1/_8$ Minute später als das zweite usf.; und so könnte man, wenn auch das auffassende Gehirn analog funktionierte, die Durchlaufung aller natürlichen Zahlen und die sichere Entscheidung der an sie gerichteten Existentialfragen mit Ja oder Nein zuwege bringen! — *Descartes* ringt mit der Vorstellung, daß in der Bewegung einer Flüssigkeit die materiellen Korpuskeln sich teilen müssen ins Unendliche, „oder wenigstens ins Unbestimmte *(in indefinitum)*, und zwar in so viele Teile, daß man sich in Gedanken keinen noch so kleinen vorstellen kann, von welchem man nicht einsähe, daß er tatsächlich in noch viel kleinere geteilt ist". Es bleibt ihm ein Rätsel, demgegenüber er sich auf die Unbegreiflichkeit der Allmacht Gottes beruft. *Euler* erklärt in seiner „Anleitung zur Naturlehre" (Opera postuma II, 1862, S. 449—560), welche in großartiger Klarheit die Grundlagen der Naturphilosophie seiner Zeit zusammenfaßt: Ungeachtet die Körper ins unendliche teilbar sind, so ist doch der Satz, daß ein jeglicher Körper aus unendlich vielen („letzten") Teilen bestehe, schlechterdings falsch und steht sogar mit der unendlichen Teilbarkeit in offenbarem Widerspruch (Kapitel 2, 12). Im Kantischen System beziehen sich auf das Kontinuum die ersten beiden Antinomien der reinen Vernunft[1]).

---

[1]) Die erste ist freilich recht schief formuliert; nicht darum handelt es sich nach der Argumentation, ob die Welt einen Anfang in der Zeit hat oder

Drei Versuche sind in der Geschichte des Denkens unternommen, das Kontinuum dennoch als Sein an sich zu fassen. Der erste radikalste läßt es aus zählbaren diskreten Elementen, Atomen, bestehen. Für die *Materie* ist dieser Weg, schon im Altertum von *Demokrit* beschritten, in der modernen Physik mit dem glänzendsten Erfolg zu Ende geführt worden. Für den *Raum* selber scheint *Platon* zuerst einen konsequenten Atomismus entworfen zu haben — in klarem Bewußtsein des gesteckten Zieles: die „Rettung" des Phainomenon von der Idee her. Erneuert wurde die atomistische Theorie des Raumes innerhalb der islamischen Philosophie von den Mutakallimun (vgl. darüber *Laßwitz*, Geschichte der Atomistik, I, 1890, S. 139—150), im Abendlande durch *Giordano Brunos* Lehre vom Minimum. Noch *Hume* wandelt sich in seiner Raum-Zeit-Lehre (Treatise on human nature, 2. Teil, 4. Abschnitt) die von ihm eigentlich gemeinte Vagheit des sinnlich Gegebenen unter den Händen um in eine Zusammensetzung aus unteilbaren Elementen. Angeregt durch die Quantentheorie, taucht der Gedanke heute wieder in Diskussionen über die Grundlagen der Physik auf. Aber er ist bisher immer bloße Spekulation und in den ersten Anfängen stecken geblieben, hat niemals den geringsten Kontakt mit der Wirklichkeit gewonnen. Wie soll man von ihm aus die räumlichen Maßbeziehungen verstehen? Baut man ein Quadrat aus „Steinchen" auf, so liegen in der Diagonale ebenso viele Steinchen wie in der Richtung der Seite; die Diagonale sollte also ebenso lang sein wie die Seite. *Hume* muß denn auch zugeben, daß das „ebenso richtige wie einleuchtende" Prinzip des Maßvergleichs von Linien und Flächen durch die Anzahl der zusammensetzenden Elemente in Wahrheit nutzlos ist. *Riemann* stellt in seinem Vortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" (1854) die Alternative auf, „daß bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriff dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muß".

---

nicht, sondern ob im Augenblick endlich oder unendlich viele erfüllte Zeitmomente vergangen sind. In einer stetig erfüllten Zeit ist das letzte der Fall, mag sie nun auf Grund eines ihr innewohnenden oder an sie herangebrachten Maßprinzips endlich- oder unendlichlang sein.

Der zweite Versuch ist das Unendlichkleine. Ausführlich und scharfsinnig wird am ersten Tag der „Discorsi e dimostrazioni" von *Galilei* darüber diskutiert. Wie ich eine gerade Linie zu einem Achteck oder Tausendeck knicken kann, so kann ich sie nach *Galilei* auch in ein Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten verwandeln, dadurch daß ich sie auf einen Kreis wickle; bin also nicht auf einen das Ziel niemals erreichenden Grenzprozeß angewiesen[1]).

Wird ein Rad auf einer horizontalen Geraden abgerollt, so erscheint jeder der konzentrischen kleineren Kreise zu einer horizontalen Gerade h von gleicher Länge ausgestreckt *(rota Aristotelis)*. Ersetzt man aber das Kreisrad durch ein reguläres Polygon von vielen Seiten, so bilden die „bedeckten" Strecken auf h, in welche sukzessive die Seiten des konzentrischen Polygons hineinfallen, eine unterbrochene Linie. Beim Kreisrad muß man also annehmen, daß h aus einer unendlich dichten Aufeinanderfolge bedeckter und unbedeckter Strecken bestehe. „Hier liegt eine Methode vor", heißt es (Opere complete, ed. Alberi, XIII, S. 51), „die uns aus vielen verwirrenden Labyrinthgängen befreit und uns ein Verständnis eröffnet von der schon besprochenen Kohäsion, von der Verdünnung und Verdichtung ohne Annahme leerer Räume und der Durchdringung der (materiellen) Körper: alles Schwierigkeiten, denen wir entgehen durch die Annahme der Zusammensetzung aus Unteilbarem". Besteht eine Kurve aus unendlich vielen geraden „Linienelementen", so liegt der Begriff der Tangente auf der Hand: sie gibt die Richtung eines einzelnen Linienelementes an, ist die Verbindungsgerade zweier „konsekutiven" Kurvenpunkte. Wer aber die Galileische Hypothese ablehnt, kann die Tangente im Kurvenpunkte P nur erklären als die Grenze, der sich die Sekante PP' unbegrenzt nähert, wenn der zweite bewegliche Kurvenpunkt P' gegen P konvergiert. Sehr instruktiv ist die

---

[1]) *Hankel* sagt (Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874): „Der Gedanke, daß man, wie weit man auch in der Reihe der Vielecke gehen möge, jene Kreisfläche nie erreiche, obgleich man ihr immer näher und ganz beliebig nahe kommt, spannt das vorstellende Denken in dem Maße, daß es um jeden Preis diese Lücke, welche gleichsam zwischen der Wirklichkeit und dem Ideal liegt, auszufüllen strebt, und psychologisch gezwungen ist, den — unendlich kleinen oder unendlich großen? — Schritt zu machen und zu sagen: der Kreis ist ein Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Die Alten aber haben diesen Schritt nicht getan; solange es griechische Geometer gab, sind dieselben immer vor jenem Abgrunde des Unendlichen stehen geblieben..."

Diskussion darüber zwischen *Johann Bernoulli* und *Leibniz*. *Leibniz* sagt (Math. Schriften, ed. Gerhardt, III, S. 536): „Nehmen wir nämlich an, daß es in der Linie tatsächlich die Abschnitte gibt, die durch $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... zu bezeichnen sind, und daß *alle* Glieder dieser Reihe tatsächlich existieren, so schließen Sie daraus, daß es auch ein unendlichkleines Glied gibt; meiner Meinung nach folgt daraus jedoch nichts weiter, als daß es tatsächlich jeden beliebigen *endlichen* angebbaren Bruch von jeder beliebigen Kleinheit gibt." Aber *Bernoulli* repliziert (a.a.O., S. 563): „Wenn *zehn* Glieder vorhanden sind, so existiert notwendig das *zehnte*, wenn *hundert*, so notwendig das *hundertste*, ..., wenn also der Zahl nach *unendlich viele* Glieder vorliegen, so existiert das *unendlichste* (infinitesimale) Glied."

Der Grenzprozeß trug den Sieg davon; denn der *Limes* ist ein unvermeidlicher Begriff, dessen Wichtigkeit von der Annahme oder Verwerfung des Unendlichkleinen nicht berührt wird. Hat man ihn aber einmal gefaßt, so sieht man, daß er das Unendlichkleine überflüssig macht. Die infinitesimale Analyse will aus dem durch elementare Gesetze beherrschten Verhalten im Unendlichkleinen durch Integration auf das Verhalten im Endlichen schließen; so z. B. aus dem universellen Attraktionsgesetz für zwei massenerfüllte „Volumelemente" auf die Größe der Anziehung beliebig gestalteter, homogen oder inhomogen mit Masse belegter ausgedehnter Körper. Deutet man aber das Unendlichkleine hier nicht „potentiell", im Sinne des Grenzprozesses, so hat das eine mit dem andern nichts zu tun, die Vorgänge im Endlichen und im Unendlichkleinen werden ganz unabhängig voneinander, man zerschneidet das verknüpfende Band. Hier hat *Eudoxos* zweifellos den richtigen Blick besessen.

Übrigens wüßte ich nicht, daß man sich hinsichtlich des Unendlichkleinen, das ein Begriff voller Verschwommenheit und voller „Unbegreiflichkeiten" blieb — „die Unbegreiflichkeiten der Mathematik" ist ein Lieblingsausdruck der damaligen Zeit —, im 18. Jahrhundert je zu der klaren Fassung des Griechen durchgerungen hätte. Unmöglich ist es nämlich keineswegs, eine folgerichtige „nicht-archimedische" Größenlehre aufzubauen[1]), in welcher das (meistens nach *Archimedes*

---

[1]) Vgl. etwa *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Kap. II, § 12. Ein schon von *Leibniz* und *Wallis* diskutiertes Beispiel unendlichkleiner Größen sind

benannte) Axiom des *Eudoxos* nicht gilt; aber man sieht sofort, daß sie für die Analysis gar nichts leistet. *Newton* und *Leibniz* hatten wohl die richtige Auffassung, daß es sich in der Infinitesimalrechnung stets nur um den *Grenzübergang* zu Null handelt, einigermaßen deutlich ausgesprochen; aber die letzte Klarheit, die Einsicht, daß die Durchführung des Grenzprozesses nicht bloß den Wert des Limes zu bestimmen, sondern *seine Existenz erst zu garantieren* hat, mangelt ihnen doch noch. Darum befindet sich auch *Leibniz* noch ganz im unklaren über die Summation unendlicher Reihen. Die Limestheorie gewinnt nur langsam an Boden. Mit Entschiedenheit verkündet *d'Alembert* 1784 in der Encyclopédie: *La théorie de la limite est la base de la vraie métaphysique du calcul différentiel. Il ne s'agit point, comme on le dit ordinairement, des quantités infiniment petites; il s'agit uniquement des limites de quantités finies.*" Und erst *Cauchy* gelingt zu Beginn des 19. Jahrhunderts die konsequente Durchführung. *Cauchy* ermittelt insbesondere das richtige Kriterium für die *Konvergenz* der unendlichen Reihen, die Bedingung dafür, daß durch einen unendlichen Prozeß eine Zahl als Grenzwert erzeugt wird. Der Beweis des Kriteriums aber erfordert jene Festlegung des Zahlbegriffes, wie sie dann im Dedekindschen Schnittprinzip erreicht wurde.

Der dritte Versuch, das Kontinuum im Platonischen Sinne zu „retten", liegt in der modernen mengentheoretischen Begründung der Analysis vor.

LITERATUR

R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872; 3. Aufl. 1905.

Literatur über die Geschichte des Problems des Kontinuums und des Irrationalen:

P. Tannery, Pour l'histoire de la science hellène. Paris 1887.

E. Frank, Platon und die sogenannten Pythagoreer. Halle 1923.

H. Hasse und *H. Scholz,* Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. Berlin 1928.

B. L. van der Waerden, Mathematische Annalen 117 (1940) S. 141 bis 161.

K. von Fritz, Annals of Mathematics 46 (1945) S. 242—264.

---

die *anguli contactus* (zwischen einem Kreis z. B. und seiner Tangente) im Vergleich zu den von geraden Linien gebildeten Winkeln.

8. Die Mengenlehre

Zunächst kann es so scheinen, als sei mit dem Grenzprozeß das starre *Sein* endgültig ins *Werden* aufgelöst; als sei damit allein schon des *Aristoteles* Lehre mathematisch realisiert, daß das Unendliche nur *δυνάμει* (der Potenz nach), nur im Entstehen und Vergehen, nicht aber *ἐνεργείᾳ* existiere. Ein Irrtum! Die einzelne konvergente Folge, wie z. B. die Folge der Partialsummen der Leibnizschen Reihe

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

welche gegen $\pi/4$ konvergiert, entfaltet sich ja nicht in einem gesetzlosen Prozeß, dem wir uns blind überlassen müssen, um zu erfahren, was er von Stufe zu Stufe gebiert; sondern sie ist ein für allemal festgelegt durch ein bestimmtes *Gesetz*, das jeder natürlichen Zahl n den zugehörigen Näherungswert (die n-te Partialsumme) zuordnet. Eine Aufteilung der unendlich vielen rationalen Zahlen in die drei Klassen I, II, III des Dedekindschen Schnitts geschieht nicht so, daß man einen Bruch nach dem anderen vornimmt und ihn seiner Klasse zuweist, sondern gesetzmäßig, indem man angibt: alle rationalen Zahlen mit der und der Eigenschaft kommen in die Klasse I (es genügt, die Klasse I zu definieren, da durch sie die beiden anderen ohne weiteres mitbestimmt sind). Das *Gesetz* bzw. die *Eigenschaft* legt die intendierte reelle Zahl exakt fest. — Es heißt, eine Funktion $f(x)$ sei an der Stelle $x = a$ stetig, wenn $f(x)$ gegen $f(a)$ konvergiert, während die Veränderliche x gegen a strebt — wie aber wird dieser Begriff der Konvergenz erklärt?: „Zu *jedem* positiven ε *gebe es* eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit, daß für *alle* reellen Zahlen x, welche der Bedingung $a - \delta < x < a + \delta$ genügen, auch die Ungleichung $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ erfüllt ist." Unsere Auffassung bleibt also statisch; sie ist gekennzeichnet durch die schrankenlose Anwendung der Termini „es gibt" und „alle" nicht bloß auf die natürlichen Zahlen, sondern auch auf die Stellen im Kontinuum, d. h.

auf die möglichen Folgen oder Mengen natürlicher Zahlen. Hierin besteht das Wesen der Mengenlehre; nicht nur die Zahlenreihe, sondern auch die Gesamtheit ihrer Teilmengen betrachtet sie als einen geschlossenen Inbegriff an sich existierender Gegenstände. So steht sie ganz auf dem Boden des aktual Unendlichen. Dies einmal zugegeben, ist aber das gewaltige Bauwerk der Analysis von unerschütterlicher Festigkeit: sicher fundiert, in allen Teilen streng begründet, scharf in den Begriffen und lückenlos in den Beweisen. Sie hat dadurch Grundlagen gewonnen, welche die Einhelligkeit aller an ihr Arbeitenden unbedingt verbürgen.

Freilich bedurfte es eines bedeutenden mathematischen Scharfsinns, um die allgemeinsten Tatsachen über die Stetigkeit, welche der Anschauung am nächsten zu liegen scheinen, sicherzustellen: daß z. B. eine stetige Funktion alle Zwischenwerte annimmt, daß eine geschlossene doppelpunktlose Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Gebiete teilt, oder daß man ein zweidimensionales Gebiet nicht auf ein dreidimensionales umkehrbar-eindeutig und stetig abbilden kann. Wir machen an unseren Studenten immer wieder die Erfahrung, wie langwieriger Schulung es bedarf, um die für das Verständnis dieser Beweise und ihrer Strenge erforderliche Voraussetzungslosigkeit sich zu erwerben. Neben solchen die Anschauung bestätigenden Sätzen deckt die Analysis andererseits viele Vorkommnisse auf, denen die Anschauung nicht zu folgen vermag: stetige Kurven, welche überall ohne Tangente sind oder ein ganzes Quadrat erfüllen u.dgl. mehr. Alle unbewiesenen Voraussetzungen auf der geschilderten Grundlage sicherzustellen, war das Werk des 19. Jahrhunderts von *Cauchy* und *Gauß* bis *Weierstraß.*

Nicht nur der Analysis, sondern auch der ersten Anfänge der Mathematik, der Lehre von den natürlichen Zahlen, hat sich die mengentheoretische Methode bemächtigt. Die Zahlenreihe ist ihr eine fertige Menge Z, innerhalb deren eine Abbildung $n \to n'$ definiert ist, welche jedem Element n der Menge in eindeutig bestimmter Weise ein Element n' zuordnet. Eben dadurch, daß so Z eineindeutig auf eine nicht mit Z identische Teilmenge von sich selber abgebildet erscheint (dasselbe leisten die Zuordnungen $n \to 2n$ oder $n \to n^2$), gibt sich Z als *unendliche Menge* zu erkennen. Der Endlichkeit einer Menge kann man erst versichert sein, wenn die Unmöglichkeit einer derartigen Abbildung nachgewiesen ist.

Für die Mengenlehre besteht also zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen keine grundsätzliche Schranke; ja das Unendliche erscheint ihr sogar als das Einfachere (wie auch *Descartes* den Vorrang des Begriffs des Unendlichen vor dem Endlichen behauptet hat: Brief an *Clerselier*, Corr. V, S. 356, und Dritte Meditation, § 28). Daß in dem angegebenen bestimmten Sinne für das Unendliche *Euklids* Größenaxiom *καὶ τὸ ὅλον μέρους μεῖζον* (das Ganze ist größer als sein Teil) nicht gilt, bemerkt bereits *Galilei*, Discorsi (Opere, ed. Alberi, XIII, S. 36); *Leibniz* (Brief an *Bernoulli*, Math. Schriften, ed. Gerhardt, III, S. 536) schließt daraus, daß „die Anzahl oder Menge aller Zahlen einen Widerspruch einschließt, wenn man sie als ein einziges Ganzes nimmt". Für *Bolzano* (Paradoxien des Unendlichen, 1851, § 20) liegt hierin eine „Paradoxie des Unendlichen", *Dedekind* endlich (Was sind und was sollen die Zahlen? 1887) erhebt diesen Tatbestand zur Definition des Unendlichen.

Nennt man mit *Dedekind* eine Menge K natürlicher Zahlen eine *Kette*, wenn mit jeder in K als Element auftretenden Zahl x auch ihr „Bild" x' in K vorkommt, so drückt sich die Tatsache, daß man zu einer beliebig vorgegebenen Zahl dadurch gelangen kann, daß man mit 1 beginnt, zu dessen Bild $1' = 2$ übergeht, darauf durch abermaligen Vollzug der Abbildung zu $2' = 3$ gelangt, und so fort — diese logisch anscheinend nicht weiter zu reduzierende Vorstellung des „und so fort", die das Wesen der natürlichen Zahlenreihe ausmacht, drückt sich in folgendem Grundsatz aus: *Jede Kette, welche* 1 *als Element enthält, ist mit ganz Z identisch.* Die vollständige Induktion kann also auf die transfinite Verwendung der Begriffe „alle" und „es gibt" begründet werden; es fällt dadurch in der Mengenlehre die Scheidewand zwischen Mathematik und Logik. Die Untersuchungen von *Dedekind*, *Frege*, *Russell* gehen darauf hinaus, die Mathematik vollständig zu logisieren. — Fragt man, wann eine natürliche Zahl n kleiner ist als die vorgegebene Zahl m, so ersetzt die Mengenlehre das finite spezifisch arithmetische Kriterium („wenn die Durchzählung der Zahlen von 1 bis m, noch bevor m erreicht ist, über n führt") durch ein transfinites von rein logischem Charakter: „wenn es eine Kette gibt, welche m, aber nicht n enthält". Aber nur indem man diese Stufe der Anwendung von „es gibt" erklimmt, wo es auf die *Mengen* natürlicher Zahlen bezogen wird, ist etwas Derartiges möglich.

Und erst hierzu ist die *Vergegenständlichung der Mengen* und damit der Eigenschaften erforderlich, welche die gewöhnliche Umgangssprache seltsamerweise von Anfang an vollzogen hat. Eine Aussage wie etwa „Die Rose ist rot“ wird nun nicht mehr dem Schema „x ist rot“ mit der einen Leerstelle x untergeordnet, sondern dem allgemeineren „x hat die Eigenschaft X“, aus welchem sie durch die Ausfüllung x = Rose, X = rot hervorgeht. Die Worte „hat die Eigenschaft“ bezeichnen eine gewisse Relation ε, welche zwischen dem willkürlichen Gegenstand x und einer willkürlichen Eigenschaft X bestehen kann. Erst hier tritt die *Kopula* ε auf: sie wandelt das von Hause aus zweiteilige Urteil in ein dreiteiliges $x \varepsilon X$. (Die grotesken Verwechslungen der Kopula mit der Existenz und der Gleichheit sind eines der traurigsten Zeichen für die Abhängigkeit der philosophischen Spekulation von zufälligen Sprachformen.) Und nun ist die Bahn frei, auch auf die Leerstelle X formal die Definitionsprinzipien § 1, 6. und 7. anzuwenden. Die Einführung des allgemeinen Mengenbegriffs besteht somit aus zwei wesentlich verschiedenen Schritten: der erste ist die eben geschilderte Vergegenständlichung, der zweite die Übereinkunft, zwei Eigenschaften X, Y oder die korrespondierenden Mengen dann gleich zu setzen, wenn alle Elemente von X auch zu Y gehören und umgekehrt.

Aus einem Inbegriff einzelner aufgewiesener Gegenstände können wir durch Auswahl der Reihe nach alle möglichen Teilmengen herstellen und überblicken. Bei der unendlichen Menge Z ist aber der Existentialabsolutismus für die Teilmengen noch bedenklicher als für die Elemente. Da man nur solcher Teilmengen habhaft werden kann, die gesetzmäßig durch eine charakteristische Eigenschaft ihrer Elemente festgelegt sind, wird man schwer das Gefühl los, daß damit eine chaotische Fülle von Möglichkeiten, von willkürlich „zusammengewürfelten“, „gesetzlosen“ Mengen unter den Tisch fällt. Aber der antinomische Charakter des unfaßbaren „Inbegriffs aller möglichen Eigenschaften natürlicher Zahlen“ läßt sich noch viel präziser darlegen. Es sei uns gelungen, irgendwie einen „*umfangsdefiniten*“ Inbegriff solcher Eigenschaften, ich will sie Eigenschaften 1. Stufe nennen, abzustecken; so daß wir von der Frage „Gibt es eine Eigenschaft 1. Stufe von der und der genau geschilderten Art $\mathfrak{A}$ oder nicht?" stets glauben dürfen, sie fände Antwort in einem an sich bestehenden Sachverhalt. Alsdann können wir von der Eigenschaft $E_{\mathfrak{A}}$ reden, die einer Zahl x dann und nur dann zukommt, falls es überhaupt eine Eigenschaft 1. Stufe von der Art $\mathfrak{A}$ *gibt*, deren x teilhaftig ist. Aber diese Eigenschaft $E_{\mathfrak{A}}$ steht gewiß ihrem Sinne nach außerhalb des Kreises der Eigenschaften 1. Stufe, sie gehört einer höheren, der 2. Stufe von Eigenschaften an, weil sie erst auf Grund der Gesamtheit der Eigenschaften 1. Stufe definiert ist. *No totality can contain members defined in terms of itself (Russell).* Ähnlich baut sich auf der 2. die 3. Stufe auf usf. Man müßte entsprechend Mengen natürlicher Zahlen und damit reelle Zahlen 1., 2., 3., ... Stufe unterscheiden. Die Konstruktionsweise der Eigenschaft $E_{\mathfrak{A}}$ tritt in der Analysis z. B. auf, wenn die obere Grenze einer Punktmenge auf der Geraden bestimmt wird. Die Verwischung dieser zuerst von *Russell* in seiner Typenlehre nachgewiesenen Stufenunterschiede durch den Existentialabsolutismus bedeutet einen unbestreitbaren *circulus vitiosus*.

Dem Dilemma würde man nur dann entgehen, wenn jede Eigenschaft 2. Stufe mit einer Eigenschaft 1. Stufe zwar nicht sinnesgleich, aber umfangsgleich wäre. Solange man die Reihe der natürlichen Zahlen für einen umfangsdefiniten Inbegriff gelten läßt, könnte man als Eigenschaften 1. Stufe z. B. diejenigen in Anspruch nehmen, welche mit Hilfe der in § 1 angeführten Definitionsprinzipien aus der einen Grundrelation „n folgt auf m" im Gebiete der natürlichen Zahlen entspringen. In diesem Falle wird unser Wunsch kaum erfüllt sein. Die Aufgabe wäre, die Konstruktionsprinzipien für die Eigenschaften 1. Stufe so zu erweitern, daß nachweislich jede Menge 2. Stufe mit einer der 1. zusammenfällt. Aber es ist nicht das leiseste Anzeichen dafür vorhanden, daß dies gelingen könnte. *Russell* läßt, um sich aus der Affäre zu ziehen, die Vernunft Harakiri begehen, indem er jenen der Einsicht sich völlig verschließenden Satz als *axiom of reducibility* postuliert. Ich selber habe in einer 1918 erschienenen Schrift „Das Kontinuum" ehrlich die Konsequenzen gezogen und ein Feld von reellen Zahlen 1. Stufe konstruiert, innerhalb dessen die wichtigsten Operationen der Analysis sich vollziehen lassen.

Trotz des antinomischen Charakters hat bisher die Idee der absoluten Existenz im Gebiete der natürlichen Zahlen und Zahlmengen zu keinem Widerspruch geführt. *G. Cantor* aber streifte alle Fesseln ab, indem er völlig frei mit dem Mengenbegriff operierte, insbesondere zuließ, daß von jeder Menge wieder die Menge aller ihrer Teilmengen gebildet werden könne. Er entwickelte eine allgemeine Theorie der *Kardinalzahlen und Ordinalzahlen unendlicher Mengen.* Erst hier stieß man an den äußersten Grenzen der Mengenlehre auf wirkliche Widersprüche. Als ihre Wurzel vermag man aber nur die schon von Anfang an in der Mathematik begangene Kühnheit aufzudecken: daß ein Feld konstruktiver Möglichkeiten als geschlossener Inbegriff an sich seiender Gegenstände behandelt wurde. Vgl. darüber *Weyl*, Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik, Symposion I, S. 13.

LITERATUR

B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851.

G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen. Berlin 1932; bes. Abschn. III u. IV.

R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 9. Aufl. Braunschweig 1961.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. Berlin 1928.

G. Frege, Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.

F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre. 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1935.

B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. 1923.

H. Weyl, Das Kontinuum. Berlin 1918.

9. Intuitive Mathematik

Klar erkannte dies erst *L. E. J. Brouwer* (seit 1907); er entwarf den Aufbau einer Mathematik, welche den Sprung ins Jenseits, von dem wir am Ende des § 6 sprachen, nicht vollzieht. Ein Existentialsatz — etwa „es gibt eine gerade Zahl" — ist überhaupt kein Urteil im eigentlichen Sinne, das einen Sachverhalt behauptet. Eine „unendliche logische Summe", wie es dieser Satz ist (1 ist gerade oder 2 ist gerade oder 3 ist gerade oder ... in inf.) ist evidentermaßen unvollziehbar. „2 ist eine gerade Zahl", das ist ein wirkliches Urteil (sofern die Eigenschaft „gerade" wie auf

S. 51 durch Rekursion definiert ist); „es gibt eine gerade Zahl" ist nur ein aus diesem Urteil gezogenes *Urteilsabstrakt*. Bezeichne ich Erkenntnis als einen wertvollen Schatz, so ist das Urteilsabstrakt ein Papier, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. Sein einziger Wert kann darin liegen, daß es mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen. Das Papier ist wertlos, solange es nicht durch ein solches dahinter stehendes Urteil wie „2 ist eine gerade Zahl" realisiert wird. Wo von nichts als der *Möglichkeit* einer Konstruktion die Rede ist, liegt kein inhaltvolles Urteil vor, sondern nur im Hinblick auf die *gelungene Konstruktion, den geführten Beweis* gewinnt eine Existentialbehauptung Sinn. An den vielen Existenztheoremen der Mathematik ist jeweils nicht das Theorem das Wertvolle, sondern die im Beweis geführte Konstruktion; ohne sie ist der Satz ein leerer Schatten.

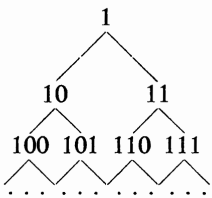
Auf die in § 3 aufgeworfene Frage: wie kann ich aus einem Existentialsatz etwas schließen, ist hier zu antworten: auf keine Weise; da er nichts aussagt, kann aus ihm auch nichts erschlossen werden. Immer muß man an Stelle des Existentialsatzes das sinnvolle Ganze setzen, aus dem er als „Urteilsabstrakt" isoliert wurde. Aber wie gelangen wir andererseits zu den allgemeinen Sätzen über natürliche Zahlen? Das werde an einem möglichst einfachen Beispiel deutlich gemacht. Die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ werde durch vollständige Induktion folgendermaßen erklärt:

$$\alpha)\ \varphi(1)=1; \qquad \beta)\ \varphi(n')=(\varphi(n))';$$

in β) haben wir eine allgemein gültige Aussage vor uns, aus der nun in Verbindung mit α) durch vollständige Induktion z. B. erschlossen werden kann, daß allgemein $\varphi(n) = n$ ist. Die *Definition* selber ist also die Wurzel der Allgemeinheit, von welcher man weiter schreitet durch die *vollständige Induktion*. Das (Definitions- und Schluß-) Prinzip der vollständigen Induktion, nicht auf eine Formel gebracht, sondern auf Schritt und Tritt in concreto angewandt, ist die eigentliche und einzige Kraft der Mathematik, die mathematische Urintuition. Hierin trifft *Brouwer* mit *H. Poincaré* zusammen (Wissenschaft und Hypothese, deutsch 2. Aufl. 1902). Die Negation einer allgemeinen Aussage über Zahlen wäre ein Existentialsatz; da dieser nichtssagend ist, sind die allgemeinen Urteile nicht negationsfähig. Auch eine allgemeine Aussage weist nicht auf einen an sich bestehenden Sachverhalt hin, sie ist nicht gemeint als logisches Produkt unendlich vieler Einzelaussagen, sondern hypothetisch: angewandt auf eine einzelne bestimmte vorliegende Zahl liefert sie ein bestimmtes Urteil. *Für das tertium non datur* (entweder haben alle Zahlen die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ oder es gibt eine Zahl mit der Eigenschaft $\overline{\mathfrak{A}}$) *ist hier kein Raum.* Der Glaube daran ist nach *Brouwer* (Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig. 28, 1920, S. 204) „historisch dadurch verursacht worden, daß man zunächst aus der Mathematik der Teilmengen einer bestimmten (lies: durch Aufweisung ihrer Elemente gegebenen) endlichen Menge die klassische Logik abstrahiert, sodann dieser Logik eine von der Mathematik unabhängige Existenz a priori zugeschrieben und sie schließlich auf Grund dieser vermeintlichen Apriorität unberechtigterweise auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewandt hat."

In der Brouwerschen Analysis ist die einzelne Stelle im *Kontinuum*, die reelle Zahl, nicht durch eine *Menge*, sondern durch eine *Folge* natürlicher Zahlen zu definieren, durch ein Gesetz, das jeder natürlichen Zahl n eine ebensolche $\varphi(n)$ zuordnet. (Die Gleichwertigkeit beider Definitionsarten fällt dahin, sobald die natürlichen Zahlen nicht mehr als ein umfangsdefiniter Inbegriff behandelt werden dürfen.) Wie kommt nun eine Behauptung nicht über alle natürlichen, sondern über alle reellen Zahlen, über alle Werte einer reellen Variablen zustande? In vielen Fällen, zeigt *Brouwer*, betreffen Aussagen der bisherigen Analysis von dieser Form bei richtiger Interpretation lediglich die Allheit der natürlichen Zahlen. Andernfalls aber wandelt sich der Begriff der Folge: es ist darunter nicht mehr eine wie auch immer gesetzmäßig determinierte, sondern eine Folge zu verstehen, die *von Schritt zu Schritt durch freie Wahlakte entsteht* und die darum nur als eine *werdende* betrachtet werden kann. Die werdende Wahlfolge repräsentiert das Kontinuum oder die *Variable*, die durch ein Gesetz ins Unendliche bestimmte Folge aber die einzelne in das Kontinuum hineinfallende reelle *Zahl.* Das Kontinuum erscheint hier nicht als ein Aggregat fester Elemente, mit *Leibniz* zu reden, sondern als ein *Medium freien Werdens.* Von einer werdenden Wahlfolge können natürlich nur solche Eigenschaften sinnvollerweise ausgesagt werden, für welche die Entscheiaung ja oder nein (kommt die Eigenschaft der Folge zu oder nicht) schon fällt, wenn man in der Folge bis zu einer gewissen Stelle gekommen ist, ohne daß die Weiterentwicklung der Folge über diesen Punkt des Werdens hinaus, wie sie auch ausfallen möge, die Entscheidung wieder umstoßen kann.

Nicht in der Beziehung von Element zu Menge, sondern in derjenigen des *Teiles* zum *Ganzen* sieht *Brouwer* im Einklang mit der Anschauung das Wesen des Kontinuums. Es fällt unter den Begriff des „extensiven Ganzen", den *Husserl* dadurch kennzeichnet, daß es „eine derartige Zerstückung zuläßt, bei welcher die Stücke ihrem Wesen nach von derselben niedersten Gattung sind, als welche durch das ungeteilte Ganze bestimmt wird" (Logische Untersuchungen, 2. Aufl., II, S. 267). Das Teilungsschema des eindimensionalen Kontinuums machen wir uns am besten an der endlichen Strecke klar. Durch Halbierung zerfällt sie in 2 Teile, einen linken (10) und einen rechten (11), jeder dieser Teile wiederum durch Halbierung in zwei weitere, einen linken und einen rechten, 100, 101, 110, 111, usf. Dieser Prozeß läßt sich rein kombinatorisch beschreiben und liefert dann die arithmetische Leerform des begrenzten eindimensionalen Kontinuums. Davon zu unterscheiden ist seine Verwirklichung an einem konkret vorliegenden Kontinuum, wie es die räumliche Strecke ist. Sie hat durch eine dem arithmetischen Schema entsprechende fortgesetzte Teilung zu geschehen, bei der es aber nicht darauf ankommt, daß die beiden Teile jedesmal gleichlang sind oder daß überhaupt ein solcher Maßbegriff innerhalb des Kontinuums zur Verfügung steht; nur muß die Feinheit der Teile schließlich unter jede mögliche Genauigkeitsschwelle sinken. (Es kann sogar sein, daß im Wesen des gegebenen Kontinuums keine Begründung für einen Längenvergleich liegt.) Durch diesen Prozeß, der in concreto immer nur bis zu einer gewissen Stufe durchgeführt sein kann, wird im Kontinuum ein Koordinatensystem festgelegt, das es ermöglicht, die einzelnen Teile begrifflich-arithmetisch durch Dualbrüche zu kennzeichnen. Da sich in einem wirklichen Kontinuum keine exakten Grenzen setzen lassen, muß man sich ferner vorstellen, daß das Teilungsgerüst bei keinem Schritt bereits genau fixiert ist, sondern bei fortschreitender Teilung die früheren Teilpunkte an Schärfe beständig zunehmen. — Je zwei zusammenstoßende Teile der νten Teilungsstufe füge man zusammen zu einem „Teilintervall νter Stufe". Die Teilintervalle νter Stufe greifen so übereinander, daß für irgendeine nur näherungsweise, aber mit einer hinreichenden Annäherung gegebene Zahl mit Sicherheit ein Teilintervall νter Stufe angegeben werden kann, in welches sie hineinfällt. Als eine



unendliche Folge von Teilintervallen wachsender Stufe, deren jedes innerhalb des vorhergehenden der Folge liegt, wird also die einzelne reelle Zahl zu definieren sein.

Zwei reelle Zahlen α, β fallen zusammen, wenn das $n$te Intervall der Folge α und das $n$te Intervall der Folge β sich *für jeden Wert von n* ganz oder teilweise überdecken; sie sind verschieden, wenn es eine Ordnungszahl n gibt, für welche jene beiden Intervalle getrennt liegen. Wegen der Unanwendbarkeit des *tertium non datur* auf derartige Sätze liegt hier nach *Brouwer* keine an sich bestehende vollständige Alternative vor. Das paßt sehr gut zu dem Charakter des anschaulichen Kontinuums; denn in ihm geht das Getrennt-Sein zweier Stellen beim Zusammenrücken sozusagen graduell, in vagen Abstufungen, über in die Ununterscheidbarkeit. In einem Kontinuum kann es nach *Brouwer* nur *stetige* Funktionen geben. *Das Kontinuum läßt sich nicht aus Teilen zusammensetzen.* So kann ich wohl innerhalb des Kontinuums der reellen Zahlen das Teilkontinuum der positiven Zahlen herausheben, indem ich nur positive Dualbrüche zur Bildung von Intervallen und Intervallfolgen benutze. Es gilt aber nicht, daß das ganze Kontinuum aus dem der positiven, der negativen und der mit 0 zusammenfallenden Zahlen zusammengesetzt sei in dem Sinne, daß jede Zahl einem dieser drei Kontinuen angehören müßte. Die alte Wahrheit kommt hier zu präziser Durchführung, welche *Aristoteles* (*περὶ ἀτόμων γραμμῶν*) so ausdrückt: „Das Bewegte bewegt sich nicht zählend“, oder (Physik, Kap. VIII): „Wenn man die stetige Linie in zwei Hälften teilt, so nimmt man den einen Punkt für zwei; man macht ihn sowohl zum Anfang als zum Ende; indem man aber so teilt, ist nicht mehr stetig weder die Linie noch die Bewegung ... In dem Stetigen sind zwar unbegrenzt viele Hälften, aber nicht der Wirklichkeit, sondern der Möglichkeit nach.“ Man vergleiche dazu die oben zitierten Stellen über das Kontinuum aus *Leibnizens* Briefwechsel! Der Grundsatz kommt wieder zu seinem Recht, daß „sich nicht trennen läßt, was nicht schon getrennt ist“ *(Gassendi)*.

Die Mathematik gewinnt mit *Brouwer* die höchste intuitive Klarheit. Die Anfänge der Analysis vermag er in natürlicher Weise zu entwickeln, den Kontakt mit der Anschauung viel enger wahrend als bisher. Aber man kann nicht leugnen, daß im Fortschreiten zu höheren und allgemeineren Theorien die Unanwendbarkeit der einfachen Grundsätze der klassischen Logik schließlich eine kaum erträgliche Schwerfälligkeit zur Folge hat. Und mit Schmerzen sieht der Mathematiker den größten Teil seines, wie er meinte, aus festen Quadern gefügten Turmbaus in Nebel zergehen.

LITERATUR

L. E. J. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde. Diss. Amsterdam u. Leipzig 1907. — Intuitionisme en Formalisme. Groningen 1912; in englischer Sprache: Bull. Americ. Math. Soc. 20 (1913). — Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. Math. Annalen 93, 95, 96 (1924—1927).

H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr. 10 (1921).

O. Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen. Husserls Jahrbuch für Philosophie 6, insbesondere S. 398—436, 459—477.

10. Symbolische Mathematik

Ist kein Weg geblieben, so radikalen Konsequenzen zu entgehen? Der Entschluß zu dem Opfer ist doppelt schwer angesichts des historischen Faktums, daß in der mengentheoretischen Analysis trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen eine vollkommene Sicherheit des Schließens und eine offenkundige Einhelligkeit aller Ergebnisse angetroffen wird. *Hilbert* macht sich anheischig, durch die axiomatische Methode die Mathematik in ihrem vollen Besitzstande zu sichern. Freilich ist auch er davon durchdrungen, daß die Kraft des inhaltlichen Denkens nicht weiter reicht als *Brouwer* behauptet, daß sie die transfiniten Schlußweisen der Mathematik nicht zu tragen imstande ist, daß es keine Rechtfertigung für alle die transfiniten Aussagen der Mathematik als *inhaltlicher, einsichtiger Wahrheiten* gibt. Was *Hilbert* sicherstellen will, ist nicht die *Wahrheit*, sondern die *Widerspruchslosigkeit* der alten Analysis.

Zu diesem Zweck muß er die Mathematik samt der Logik *formalisieren* zu einem nach festen Regeln vor sich gehenden Spiel mit *Zeichen*. (Sie sind nicht gemeint als Zeichen *für* etwas; Zeichen der letzteren Art nennt Hilbert „Mitteilungszeichen" und verwendet für sie die deutschen Buchstaben.) Die mathematischen Formeln, die aus jenen Zeichen bestehen, lassen nicht durchweg eine inhaltliche Deutung zu; neben die sinnvollen sind „ideale Aussagen" getreten, die eingeführt wurden, um die Gültigkeit der einfachen logischen Gesetze künstlich wiederherzustellen, die nach *Brouwer* beim Übergang zum Unendlichen verlorengegangen waren — so wie in der algebraischen Zahlentheorie ideale Zahlen eingeführt werden, um die Gültigkeit der einfachen Teilbarkeitssätze zu erzwingen. Es kommen vier verschiedene Sorten von Zeichen vor[1]), die sich durch die für sie gültigen Spielregeln analog unterscheiden wie etwa die Bauern und die Springer im Schachspiel: *Konstante* (wie 1), *Variable* (Symbole für Leerstellen, $x, y, \ldots$), ein- und mehrstellige *Operationen* und *Integrationen*. Die wichtigsten einstelligen Operationen sind $^-$ (Negation), σ (Übergang von einer natürlichen Zahl zur nächstfolgenden), Z ($Z\mathfrak{a}$, lies: $\mathfrak{a}$ ist natürliche Zahl), die wichtigsten zweistelligen $\rightarrow$, $=$ und ε. Wir fassen sie alle als Operationen auf; Z ist die Operation, welche aus $\mathfrak{a}$ die Aussage erzeugt: $\mathfrak{a}$ ist eine Zahl, $=$ die Operation, welche aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Aussage erzeugt: $\mathfrak{a}$ gleich $\mathfrak{b}$. Konsequenterweise mögen diese Operationszeichen denn auch (um die Spielregeln bequem allgemein formulieren zu können) alle *vor* die Glieder geschrieben werden, auf welche sie sich erstrecken, z. B. $\varepsilon \begin{smallmatrix} \diagup \mathfrak{a} \\ \diagdown \mathfrak{b} \end{smallmatrix}$ statt $\mathfrak{a}\ \varepsilon\ \mathfrak{b}$. Integrationen sind Σ_x, Π_x; sie tragen eine (oder mehrere) beliebige Variable als Index. Durch ein vorgesetztes Integrationszeichen mit dem Index x wird die Variable x an allen Stellen der darauf folgenden Formel „gebunden", ihrer Substitutionsfähigkeit beraubt. Im Laufe der Entwicklung der Mathematik können beständig neue Zeichen eingeführt werden. Was eine *Formel* ist, wird rekursiv erklärt: „α) jede Konstante oder Variable für sich ist eine Formel; β) aus einer oder zwei (oder mehreren) schon gebildeten Formeln entsteht eine neue, wenn man ein ein- bzw. zwei- (bzw. mehr-)stelliges Operations- oder Integrationszeichen hinschreibt und die betreffenden Formeln dahinter setzt." Die fertige Formel sieht dann wie ein (parthenogenetischer) Stammbaum von Symbolen aus, von dem die „grammatikalische Struktur" der Formel, das heißt die Art ihrer rekursiven Konstruktion unzweideutig abgelesen werden kann. Außerdem kann man so

[1]) Ich schließe mich hier einem gegenüber *Hilbert* vereinfachten Formalismus an, den *v. Neumann* (Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschr. 1926) aufstellt.

entscheiden, ob eine gegebene stammbaumähnliche Anordnung von Symbolen eine Formel ist oder nicht.

Man braucht sich kein Gewissen daraus zu machen, daß im Formalismus die Operationen unterschiedslos auf alles mögliche ausgeübt werden. Wer ob solcher Großzügigkeit bange ist, wird vielleicht zwischen „numerischen" und „faktischen" Formeln unterscheiden wollen, etwa nach den folgenden rekursiven Festsetzungen: „α) Eine Konstante oder Variable für sich, ferner jede mit σ oder ε_x beginnende Formel ist eine *numerische* Formel; andererseits sind Formeln, die mit $^-$, $\rightarrow$, $\vee$, &, Z, $=$, ε, Σ_x, Π_x beginnen, *faktische*. β) Auf die Symbole σ und Z muß eine, auf $=$, ε müssen zwei *numerische*, dagegen auf $^-$, ε_x, Σ_x, Π_x eine und auf $\rightarrow$, &, $\vee$ zwei *faktische* Formeln folgen". Ähnliche Einschränkungen müssen sodann die axiomatischen Regeln und die syllogistische Regel des Schließens begleiten. Ist (wie im folgenden stets) $\mathfrak{A}(x)$ eine beliebige Formel, in welcher nur eine Variable x frei (nicht gebunden) vorkommt, $\mathfrak{b}$ (oder $\mathfrak{c}$) eine Formel ohne freie Variable oder eine „geschlossene Formel", so kann man in $\mathfrak{A}$ überall dort, wo x frei auftritt, die ganze Formel $\mathfrak{b}$ an Stelle von x einsetzen. Durch dieses anschaulich beschriebene Verfahren der *Substitution* entsteht wiederum eine Formel; sie ist gemeint mit dem Abkürzungszeichen $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir jetzt die Operationszeichen wieder in der üblichen Weise vor, über oder zwischen den Gliedern und schreiben $\mathfrak{a}+1$ an Stelle von $\sigma\mathfrak{a}$ (so daß also $+1$ ein nachgestelltes Operationszeichen ist, das mit der Konstanten 1 nichts zu tun hat).

Ausgangspunkt eines Beweises sind die *Axiome*. Dazu gehören erstens die Axiome der finiten Logik; z. B.

$$\mathfrak{c}\rightarrow(\mathfrak{b}\rightarrow\mathfrak{c}).$$

Doch werden sie jetzt als allgemeine *Regeln zur Bildung von Axiomen* betrachtet: nimm irgend zwei Formeln $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ her ohne freie Variable und stelle sie zu der Formel $\mathfrak{c}\rightarrow(\mathfrak{b}\rightarrow\mathfrak{c})$ zusammen; was du so erhältst, darfst du als Axiom benutzen. Zweitens treten auf die beiden Axiomenregeln der Gleichheit; sie vermitteln zwischen Logik und Arithmetik:

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{b};$$
$$(\mathfrak{b}=\mathfrak{c})\rightarrow\big(\mathfrak{A}(\mathfrak{b})=\mathfrak{A}(\mathfrak{c})\big).$$

Drittens spezifisch arithmetische Regeln von finitem Charakter; in ihnen erscheint die Konstante 1, der gegenständliche Ausgangspunkt aller Konstruktion:

$$\begin{array}{l} Z1\,. \\ Z\mathfrak{b}\rightarrow Z(\mathfrak{b}+1)\,. \\ (\mathfrak{b}+1=\mathfrak{c}+1)\rightarrow(\mathfrak{b}=\mathfrak{c})\,. \\ \hline \mathfrak{b}+1=1\,. \end{array}$$

Nunmehr folgt der *transfinite* Teil. Stützt man sich auf die von *Brouwer* bestrittene Alternative, daß es entweder einen Redlichen gibt oder daß alle Menschen unredlich sind, so kann man einen Aristides finden, von welchem feststeht: ist irgendein Mensch redlich, so ist Aristides redlich. Man wähle nämlich im ersten Fall für Aristides einen der Redlichen, im zweiten einen beliebig herausgegriffenen Menschen. Um aber für jede Eigenschaft, nicht nur die „Redlichkeit", für jede eine einzige Variable x frei enthaltende Formel $\mathfrak{A}$ diesen Aristides konstruieren zu können, fingieren wir einen göttlichen Automaten, der das leistet: er liefert uns, wenn wir eine beliebige Eigenschaft $\mathfrak{A}$ in ihn hineinwerfen, jenes Individuum $\varepsilon_x\mathfrak{A}$, das sicherlich die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ besitzt, wenn es überhaupt ein derartiges Individuum gibt. ε_x ist ein Integrationszeichen (aus Koketterie mit dem verhängnisvollen Sprachgebrauch des Wörtleins „ist" sowohl für die Kopula wie für die Existenz verwenden auch wir für beide denselben Buchstaben ε; aber durch den an das existentiale ε angehängten Variablenindex wird die Verwechslung verhütet). Verfügten wir über einen solchen Automaten, so wären wir aller Mühen überhoben, die uns „es gibt" und „alle" bereiten; aber der Glaube an seine Existenz ist natürlich der reinste Unsinn. Die Mathematik tut jedoch so, als wäre er vorhanden. Das können wir in einer Axiomenregel zum Ausdruck bringen, und wenn die Anwendung dieser Regel nicht zu Widersprüchen führt, so ist ihre Aufstellung in der formalisierten Mathematik legitim. Die transfiniten logischen Axiomenregeln lauten nunmehr:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}(\mathfrak{b})\rightarrow\Sigma_x\mathfrak{A}(x)\,. & \Pi_x\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{A}(\mathfrak{b})\,. \\ \Sigma_x\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{A}(\varepsilon_x\mathfrak{A})\,. & \mathfrak{A}(\varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}})\rightarrow\Pi_x\mathfrak{A}(x)\,. \end{array}$$

Die der zweiten Zeile, die wir in § 3 noch vermißten, erlauben uns, aus Σ_x etwas zu folgern und von andern Formeln her auf Π_x zu schließen. Natürlich leisten sie nicht dieselben Dienste wie der fingierte Automat; denn sie verschweigen für eine vorgelegte Formel $\mathfrak{A}$, was $\varepsilon_x\mathfrak{A}$ ist. Nur unter Umständen kann sich eine Formel wie $\varepsilon_x\mathfrak{A} = 1$ als Endformel eines von den Axiomen ausgehenden Beweises ergeben.

Unter den arithmetischen Axiomen fehlt noch das Prinzip der vollständigen Induktion; es kann als transfinite arithmetische Axiomenregel gefaßt werden, welche zum Ausdruck bringt, daß eine Eigenschaft $\mathfrak{A}$, welche der Zahl 1 zukommt und für alle x von x auf $x + 1$ „sich vererbt“, einer beliebigen Zahl zukommt. Sie wird jedoch überflüssig, wie wir wissen, wenn es zulässig ist, zu jeder Eigenschaft $\mathfrak{A}$ ein neues Ding y, die korrespondierende Menge einzuführen, derart, daß die Aussage „x ist Element von y“ mit dem Bestehen von $\mathfrak{A}(x)$ gleichbedeutend ist. Formuliert man dies als eine Axiomenregel, so stellt sich jedoch alsbald heraus, daß ihre Anwendung unweigerlich zu einem formalen Widerspruch führt, *womit über das schrankenlose Recht zur Vergegenständlichung der Stab gebrochen ist.* Für die Analysis genügt aber die Beschränkung des Arguments x auf den Bereich der natürlichen Zahlen, so daß wir die engere *transfinite mengentheoretische Regel* aufstellen:

$$\Sigma_y \Pi_x \{Zx \rightarrow ((x \in y) \rightleftarrows \mathfrak{A}(x))\}, \qquad (*)$$

wo $\mathfrak{B} \rightleftarrows \mathfrak{C}$ als Abkürzung für $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$ & $(\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B})$ dient. — Es scheint für den Aufbau derAnalysis nicht unerläßlich, aber wünschenswert zu sein, das *Axiom der Bestimmtheit* hinzuzufügen, nach welchem zwei Zahlmengen gleich sind, welche genau dieselben Elemente enthalten:

$$\Pi_x \{Zx \rightarrow ((x \in \mathfrak{b}) \rightleftarrows (x \in \mathfrak{c}))\} \rightarrow (\mathfrak{b} = \mathfrak{c}).$$

Ein mathematischer *Beweis* besteht darin, daß man sich Axiome nach den angegebenen Regeln herstellt — diese Axiome enthalten niemals freie Variable — und von ihnen aus durch Anwendung der schon in § 3 besprochenen Schlußregel des *Syllogismus* zunächst auf solche Axiome, weiterhin auf die bereits gewonnenen Formeln zu immer neuen vordringt. Daß man nicht a priori überblicken kann, zu was für „*beweisbaren Formeln*“ man durch dieses Spiel gelangt, liegt vor allem daran, daß durch den Syllogismus aus zwei Formeln $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$ eine neue $\mathfrak{c}$ entsteht, welche kürzer ist als die zweite der Prämissen, daß im Beweisspiel beständig Aufbau und Abbau miteinander wechseln.

Bis hierhin ist alles Spiel, nicht Erkenntnis. Das Spiel wird nun aber in der „*Metamathematik*", wie *Hilbert* sich ausdrückt, zum Gegenstand der Erkenntnis gemacht: es soll erkannt werden, daß man niemals zu einem *Widerspruch* gelangt. Ein solcher läge vor, wenn von zwei in concreto durchgespielten Beweispartien die eine mit einer Formel $\mathfrak{b}$ endete, die andere mit der entgegengesetzten $\overline{\mathfrak{b}}$. Nur zur Gewinnung dieser einen Erkenntnis wird von *Hilbert* das finite inhaltliche bedeutungserfüllte Denken benötigt, das auf keine „Axiome" gebracht werden kann. Insbesondere betätigt sich in diesem inhaltlichen Denken ein anschaulich-finiter Schluß durch vollständige Induktion, wie wir ihn analog vollzogen, als wir uns zur Einsicht brachten (§ 4), daß in einer richtig gespielten Schachpartie niemals 10 Damen der gleichen Farbe auftreten können.

Eine der Regeln des elementaren Aussagekalküls, die entweder unter den axiomatischen Regeln selbst auftritt oder leicht aus ihnen geschlossen werden kann, lautet

$$\overline{\mathfrak{b}} \to (\mathfrak{b} \to \mathfrak{c}), \qquad (*)$$

wo $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beliebige geschlossene Formeln sind. Sei $\mathfrak{c}$ eine willkürliche derartige Formel, und nehmen wir an, eine gewisse Formel $\mathfrak{b}$ und ihre Negation $\overline{\mathfrak{b}}$ seien bewiesen worden. Unter diesen Umständen führen zwei syllogistische Schritte von (*) zunächst zu $\mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$ und dann zu $\mathfrak{c}$. Ist nun bekannt, daß der Formalismus nicht widerspruchsfrei ist, so kann *jede beliebige* geschlossene Formel $\mathfrak{c}$ bewiesen werden, und damit verliert das Beweisspiel jedes Interesse. Die Widerspruchslosigkeit kann also dadurch definiert werden, daß man sagt, die Formel $\overline{(1 = 1)}$ sei nicht beweisbar.

Das Axiomensystem kann beständig erweitert werden; aber immer ist zu zeigen, daß dabei die Widerspruchslosigkeit aufrechterhalten bleibt. Insbesondere sind auch Definitionen in Gestalt neuer Axiome oder Axiomenregeln einzuführen; z. B.

$$\sigma 1 = 2, \quad \sigma(\sigma b) = \sigma_2 b\,.$$

Dies läßt sich besonders auf die rekursiven Definitionen von $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ und anderen arithmetischen Operationen anwenden. Ein für allemal läßt sich zeigen, daß eine zuvor bestehende Widerspruchslosigkeit erhalten bleibt, wenn Axiome dieser Art hinzugefügt werden, die einfache oder rekursive Definitionen bedeuten[1]). Was die natürlichen Zahlen betrifft, kann der *Hilbert*sche Aufbau im Gegensatz zum *Brouwer*schen verzichten auf jene „Möglichkeit in infinitum", die in § 6 als 3ter Schritt des konstruktiven Erkennens geschildert wurde; für *Hilbert* ist z. B. 10^{12} ein „transfinites" Symbol, das keine Zahl (Zeichen von der Gestalt $\sigma\sigma \ldots \sigma 1$) bedeutet. Geometrie und Physik können, sobald und soweit sie streng axiomatisiert sind, angegliedert werden. Ja, *Hilbert* meint (Axiomatisches Denken, 1917): „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik"[2]).

Solange man die transfiniten Bestandteile außenvor läßt, ist der Beweis der Widerspruchslosigkeit (WB) leicht zu erbringen mittels „Wertung der Formeln". Durch ein genau beschriebenes rekursives Verfahren wird jeder Formel gemäß ihrer Entstehung einer der Werte *W* oder *F* (wahr oder falsch) so verliehen, daß offenbarerweise die finiten Axiome den Wert *W* bekommen und für die logischen Verknüpfungen die in § 3 angegebenen Regeln zur Wertbestimmung gelten. *Solange das Transfinite ausgeschaltet bleibt, ist also der Syllogismus, das deduktive Verfahren ganz kraftlos*; über die Wahrheit oder Falschheit des Vordersatzes $\mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$ wird hier nämlich immer erst entschieden, *nachdem* der Schlußsatz $\mathfrak{c}$ gewertet ist. — Auf diesem Wege ist der WB nicht mehr zu führen, wenn die transfiniten Axiomregeln hinzugenommen werden. Hierin

---

[1]) Außerdem kann gezeigt werden, daß alle rekursiv definierbaren arithmetischen Operationen, sind die definierenden Axiome für $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ und die entsprechenden Rechensymbole $+$, $\cdot$ erst einmal eingeführt, im Formalismus ausdrückbar sind. Vgl. z. B. Hilbert und Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. I, S. 412—422.

[2]) Aus einer wesentlich anderen Auffassung der Mathematik heraus kommt *Kant* zu dem Ausspruch (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Vorrede): „daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist". Im selben Sinne aber wie *Hilbert* erklärt *Husserl* (Logische Untersuchungen I, § 71), mit besonderer Bezugnahme auf die mathematische Logik, daß „die mathematische Form der Behandlung ... bei allen streng entwickelten Theorien (man muß dies Wort allerdings auch im echten Sinne nehmen) die einzig wissenschaftliche ist, die einzige, welche systematische Geschlossenheit und Vollendung, welche Einsicht über alle möglichen Fragen und die möglichen Formen ihrer Lösung bietet".

macht sich bemerkbar, daß mit ihnen die Einsicht in wahr und falsch aufhört. Gelungen ist aber auf einem mehr indirekten Wege der WB für den Fall, daß die transfiniten *logischen* Axiome mitzugelassen werden (*v. Neumann*, a. a. O.). Schon hier ist er recht verwickelt. Damit ist sichergestellt, daß man keinen Widerspruch zu befürchten braucht, wenn man — wie ich es in meiner Schrift „Das Kontinuum" vom Jahre 1918 tat — die Reihe der natürlichen Zahlen als geschlossenen Inbegriff seiender Gegenstände behandelt. Dagegen steht der WB noch aus für die Einbeziehung der transfiniten mengentheoretischen Axiomregel (*), welche den gleichen Standpunkt gegenüber dem „Inbegriff aller möglichen Zahlmengen" zur Geltung bringen soll. Erst die Durchführung des WB oder die Bemühungen darum decken uns die höchst verzwickte logische Struktur der Mathematik auf, ein Gewirr von zirkelhaften Rückverknüpfungen, von denen sich zunächst gar nicht übersehen läßt, ob sie nicht zu eklatanten Widersprüchen führen.

Der geschilderte Symbolismus nimmt offenbar in verfeinerter Form die Aufgabe von neuem in Angriff, welche sich *Leibniz* mit seiner „allgemeinen Charakteristik" und *ars combinatoria* gestellt hatte. Aber geht hier die alte Analysis nicht bloß noch als ein blutleeres Gespenst um? Die *Hilbert*sche Mathematik mag ein hübsches Formelspiel sein, amüsanter selbst als das Schachspiel; aber was hat sie mit Erkenntnis zu tun, da doch eingestandenermaßen ihre Formeln keine inhaltliche Bedeutung haben sollen, derzufolge sie einsichtige Wahrheiten ausdrückten? Gegenstand der Mathematik sind nach *Hilbert* die konkreten Zeichen selber. Es ist darum keine Ironie, wenn *Brouwer* sagt (Intuitionisme en formalisme, S. 7): *Op de vraag, waar de wiskundige exactheid dan wel bestaat, antwoorden beide partijen verschillend; de intuitionist zegt: in het menschelijk intellect, de formalist: op het papier.* Auf die Frage, warum er gerade diese Regeln aufstellt und warum ihm daran liegt, daß niemals zwei beweisbare Formeln von der Gestalt $\mathfrak{b}$ und $\overline{\mathfrak{b}}$ vorkommen, muß der konsequente Formalist die Antwort schuldig bleiben. An Philosophie, Psychologie oder Anthropologie wird er uns, wie *Brouwer* meint, verweisen zur Rechtfertigung seines „*lustgevoel van echtheitssovertuiging*" und seines Glaubens, daß das gewählte Axiomensystem sich besser auf die Erfahrungswelt projizieren lasse als andere.

Die letzte Bemerkung erinnert uns daran, daß die Mathematik sich in den Dienst der Naturwissenschaft zu stellen habe. Den Aussagen der theoretischen Physik eignet aber sicherlich nicht jener Charakter, den *Brouwer* von den mathematischen verlangt, daß nämlich jede ihren eigenen, restlos in der Anschauung vollziehbaren Sinn in sich trage; sondern dort steht, wenn es mit der Erfahrung konfrontiert wird, nur das *System als Ganzes* in Frage. Wir müssen offenbar scharf scheiden zwischen *phänomenalem Wissen*, anschauender Einsicht — wie sie z. B. in dem Urteil vorliegt: „Dies (mir in einem gegenwärtigen Akt der Wahrnehmung gegebene) Blatt hat diese (mir in eben dieser Wahrnehmung gegebene) grüne Farbe" — und *theoretischer Gestaltung*. Das Wissen gibt Wahrheit, sein Organ ist das „Sehen" im weitesten Sinne. Die theoretische Gestaltung scheint nur an ein einziges streng formulierbares Vernunftprinzip gebunden zu sein: *Einstimmigkeit*, die hier in der Mathematik, wo die Shpäre des sinnlich Gegebenen noch nicht berührt wird, lediglich in der Widerspruchslosigkeit besteht; ihr Organ ist „das Schöpferische". Im Zusammenhang mit der Physik werden wir die Frage genauer erörtern müssen, was außer der Einhelligkeit auf sie bestimmend wirkt. Die einsichtige Wahrheit ist dafür, wenn auch niemals letzte Norm, so doch gewiß nicht gleichgültig. *Hilbert* selber äußert sich so darüber (Über das Unendliche, Math. Annalen 95, S. 190): „Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist ... lediglich die einer Idee — wenn man, nach den Worten *Kants*, unter einer Idee einen Vernunftbegriff versteht, der alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete *im Sinne der Totalität ergänzt* wird." Vielleicht findet aber jene Frage eine vollständige Antwort nur durch den Hinweis auf das in der Geschichte an uns sich vollziehende Leben des Geistes, von dem meine eigene Existenz zwar ein wesentlicher, aber kein autonomer Teil ist. Sie ist Licht und Finsternis, Zufälligkeit und Notwendigkeit, Sklaverei und Freiheit, und es kann nicht erwartet werden, daß sich eine symbolische Konstruktion der Welt je in einer endgültigen Form davon abheben würde.

Literatur

G. W. Leibniz, Philos. Schriften, ed. Gerhardt, VII, S. 184—189.

L. Couturat, Opuscules et fragments inédits de *Leibniz*. Paris 1902.

D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 1 (1922).

D. Hilbert, Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Annalen 88 (1922).

D. Hilbert, Über das Unendliche. Math. Annalen 95 (1925).

D. Hilbert u. *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik. 2 Bände. Berlin 1934—1939.

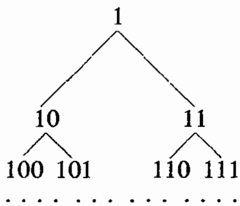
11. Über das Wesen der mathematischen Erkenntnis

Die Mathematik wird von alters her gekennzeichnet als die Wissenschaft von der *Größe* — oder von *Raum und Zahl.* (Wenn wir diese Definition auch bei *Leibniz* antreffen, so ist für ihn doch die so umgrenzte *Mathesis* nur ein Unterteil der *Ars combinatoria.*) Heute muß sie uns als viel zu eng erscheinen im Hinblick auf solche Gebiete wie die projektive Geometrie oder gar die Gruppentheorie. So brauchen wir uns denn auch nicht um eine genauere Festlegung des Begriffes des Quantitativen zu kümmern, und die Entwicklung der Mathematik selbst erweckt Zweifel daran, ob *Quantität* eine wohlumgrenzte und wichtige philosophische Kategorie ist. Die Geometrie, sofern sie den wirklichen Raum erforscht, rechnen wir nicht mehr zur reinen Mathematik, sondern sie gehört, prinzipiell in der gleichen Weise wie Mechanik und Physik, zu ihren Anwendungen. Unter dem Einfluß der allgemeinen Arithmetik der hyperkomplexen Zahlen, später der axiomatischen Untersuchungen, der Mengenlehre und Logistik verwischt sich der Unterschied zwischen *Mathematik und Logik*. „*Mathematics is the science, which draws necessary conclusions*“, erklärt *B. Peirce* 1870. Ausführlich beschäftigt sich mit der Definition der „Mathematik oder Logik“ von diesem Standpunkt aus das 11. Kapitel in *Husserls* Logischen Untersuchungen (Bd. I, „Die Idee der reinen Logik“) und das letzte in *Russells* „Einführung in die mathematische Philosophie“.

Die durch die Antinomien der Mengenlehre heraufbeschworene Krisis läßt dann, ob man nun mit *Brouwer* dem konsequenten Intuitionismus oder mit *Hilbert* dem Symbolismus folgt, die Eigenart der Mathematik wieder deutlicher hervorleuchten. *Brouwer* erblickt genau wie *Plato* in der Zwei-Einigkeit die Wurzel des mathematischen Denkens. „*Dit neo-intuitionisme zieht het uiteenvallen van levensmomenten in qualitatief verschillende deelen, die alleen gescheiden door den tijd zich weer kunnen vereenigen, als oergebeuren in het menschelijk intellect, en het abstraheeren van dit uiteenvallen van elken gevoelsinhoud tot de intuitie van twee-eenigheid zonder meer, als oergebeuren van het wiskundig denken.*“ Wir sahen, wie dadurch, daß immer wieder „eins zu zwei“ wird[1]), das

[1]) Eine Anspielung auf „Da wurde Eins zu Zwei“, womit Nietzsche in

Teilungsschema des eindimensionalen Kontinuums entsteht. Auf dieselbe Art gehen aber auch die ganzen Zahlen gemäß ihrer Schreibweise im Dualsystem hervor. *Stenzel* (Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles, 1924) macht es wahrscheinlich, daß *Plato* sich die Zahlen in dieses Schema ordnete; weil man aber hier durch die Spaltung von eins in zwei zu immer größeren Zahlen aufsteigt, im Kontinuum zu immer kleineren Teilen kommt, nennt er die Zweiheit auch das Groß-Kleine. (Eine andere Interpretation findet sich dagegen bei *H. Cherniss*, The Riddle of the Early Academy, Univ. of Calif. Press 1945.) Angemessener ist den ganzen



Zahlen die natürliche Reihung, welche *Aristoteles* (Metaphysik A 6 und M 6) der Platonischen Zahlauffassung entgegensetzt. Aber auch sie kann man aus der Zweieinigkeit dadurch entstehen lassen, daß man ausgeht von einem Ungeschiedenen, dies zerlegt in ein Element (die 1), welches als Einheit bewahrt bleibt, und einen ungeschiedenen Rest, den Rest wiederum zerlegt in ein Element (2) und einen ungeschiedenen Rest usf. (Anschaulich: von einer Halbgeraden wird immer wieder ein Stück abgehauen, von der in die Zukunft offenen Zeit ist immer wieder ein Stück durchlebt.) Hier verfällt nicht jeder Teil, sondern stets nur der letzte übrig gebliebene ungeschiedene Rest der Zweiteilung.

Unabhängig aber davon, welchen Wert man dieser letzten Reduktion des mathematischen Denkens auf die Zweieinigkeit beimißt, erscheint vom intuitionistischen Standpunkt die *vollständige Induktion* als dasjenige, was die Mathematik davor bewahrt, eine ungeheure Tautologie zu sein, und prägt ihren Behauptungen einen synthetischen, nicht-analytischen Charakter auf. Das Verfahren der vollständigen Induktion ist in der Tat ein durchgehender und entscheidender Zug. Scheint es zunächst in der elementaren Geometrie, insbesondere der projektiven, keine Rolle zu spielen, so liegt der Grund darin, daß hier von „es gibt“ und „alle“ auf die Punkte ein naiver Gebrauch gemacht wird. Gemäß der intuitionistischen Auffassung ist das unzulässig; das Konstruktionsfeld der Geometrie ist ein Kontinuum und daher strenger mathemati-

---

mehreren seiner Gedichte sein Zarathustra-Erlebnis schilderte, z. B. in „Sils Maria“:

„Da, plötzlich, Freundin, wurde Eins zu Zwei —
— und Zarathustra ging an mir vorbei…“

scher Behandlung erst fähig, nachdem es, wie oben geschildert (vgl. auch § 15), mit einem Teilungsnetz übersponnen ist.

Vom formalistischen Standpunkt tritt an Stelle der vollständigen Induktion der transfinite Axiomenbestandteil und drückt der Mathematik ihr Gepräge auf. *Sie besteht hier überhaupt nicht aus evidenten Wahrheiten, sondern ist kühne theoretische Konstruktion,* also das äußerste Gegenteil von analytischer Selbstverständlichkeit. Das inhaltliche Denken der Metamathematik andererseits, welche den Beweis der Widerspruchslosigkeit zu erbringen hat, operiert, den Beweisgang durchlaufend, mit einem finiten Schluß von n auf $n + 1$ und befaßt sich mit „außer-logischen konkreten Objekten, die sich vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und deren Aufweisung, Unterscheidung, Aufeinanderfolge oder Nebeneinandergereihtsein mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben ist als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf" *(Hilbert)*. Deshalb stimmt *Hilbert* mit *Kant*, der übrigens in der Algebra auch die symbolische Konstruktion mit anschaulichen Zeichen als wesentlich betonte (Kritik der reinen Vernunft, 2. Aufl., S. 745), darin überein, „daß die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann" (Über das Unendliche, S. 171).

Immerhin ist nicht zu verkennen, daß bei dem Kantischen Gebrauch der Worte analytisch und synthetisch wenigstens die einzelne bestimmte Gleichung wie $3 + 2 = 5$ analytisch heißen müßte; denn, wie *Leibniz* ausführte, folgt sie logisch aus den Definitionen

$$3+1=4, \qquad 4+1=5, \qquad (a+1)+1=a+2,$$

„liegt also in den Begriffen" der Zahlen 3, 5 und der Operation $+ 2$. Oder welche Bedeutung verband *Kant* mit diesen Zeichen?

Die Mathematik ist unbezweifelbar *a priori;* sie ist nicht, wie *J. St. Mill* uns glauben machen will, auf Erfahrung gegründet — in dem Sinne, daß erst wiederholte Versuche an Zahlenbeispielen dem für beliebige natürliche Zahlen aufgestellten arithmetischen Satz $m + n = n + m$ ein immer größeres Wahrheitsgewicht verleihen.

Ein auffälliger Zug aller Mathematik, der den Zugang zu ihr dem Laien so sehr erschwert, ist der reichliche Gebrauch von

Symbolen. Vom intuitionistischen Standpunkte aus liegt hierin kein wesenhaftes Merkmal; der Intuitionist sieht in ihnen wie in der Sprache nur Hilfsmittel zur Unterstützung des Gedächtnisses durch Fixierung und zur Mitteilung. Anders im Formalismus. Für ihn besteht die Mathematik ganz und gar aus Symbolen, die keine in der sinnlichen oder geistigen Anschauung aufzuweisende Bedeutung haben und mit denen nach sicheren Regeln operiert wird, während die Sprache — in der Beschreibung der Substitution und der praktischen Schlußregel z. B. und in der metamathematischen Überlegung — zur (prinzipiell immer unsicher bleibenden Verständigung, nämlich zur) Mitteilung von Verfahrensweisen und geistiger bedeutungserfüllter Denkakte dient. „In der geometrischen Figur und später in der mathematischen Formel", sagt *A. Speiser* (Klassische Stücke der Mathematik 1925, S. 148), „hat sich die Mathematik von der Sprache frei gemacht, und wenn man die gewaltige Arbeit und den immer wieder überraschenden Erfolg bei diesem Prozeß kennt, so hat es fast den Anschein, als ob die Mathematik in heutiger Zeit leistungsfähiger ist auf dem ihr zugemessenen Teil der Geisteswelt als etwa die Musik oder gar die in so deplorablem Zustand befindlichen modernen Sprachen auf ihren Fronten."

In seiner transzendentalen Methodenlehre (II. Teil der Kritik der reinen Vernunft) erblickt *Kant* das Wesen der Mathematik in der *Konstruktion:* „Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe." Am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck macht er deutlich, wie die geometrischen Sätze nicht durch Begriffszergliederung, sondern durch Konstruktion geeigneter Hilfspunkte und Hilfslinien gefunden werden. Seine nähere Schilderung des konstruktiven Verfahrens kann uns heute kaum mehr befriedigen. Aber soviel ist wahr, daß man im Beweise eines mathematischen Satzes über den unmittelbaren Inhalt des Satzes fast immer weit hinausgehen muß. Der Grund ist darin zu suchen, daß ein nach der Schlußregel des Syllogismus sich vollziehender Beweis, wie schon früher hervorgehoben, kein monoton fortschreitender Aufbau ist — im Gegensatz zur Formel, deren Herstellung immer im gleichen Sinne fortschreitet und von welcher daher alle Konstruktionsteile im fertigen Resultat aufbewahrt liegen —, sondern ein ständiger Wechsel von Aufbau und Abbau. Dieser Umstand zusammen mit den in § 6, S. 56 aufgezählten Punkten 1., 2. und 3. scheinen mir ungefähr zutreffend die *Konstruktion* im Gegensatz zur reinen *Betrachtung* zu kennzeichnen.

Die Stufen, welche die Grundlagenforschung in der Mathematik während der letzten Zeit durchlaufen hat, entsprechen den drei fundamentalen *erkenntnistheoretischen Einstellungsmöglichkeiten*. Die mengentheoretische Begründung ist die Stufe des *naiven Realismus*, der sich des Überganges vom Gegebenen zum Transzendenten nicht bewußt wird. *Brouwer* vertritt den *Idealismus*, indem er Zurückführung aller Wahrheit auf das anschaulich Gegebene fordert. Im axiomatischen Formalismus endlich unternimmt das Bewußtsein den Versuch, „über den eigenen Schatten zu springen", den Stoff des Gegebenen hinter sich zu lassen, das *Transzendente* darzustellen; aber, wie sich von selbst versteht, nur im *Symbol*. Den idealistischen Standpunkt in der Erkenntnistheorie hat die abendländische Philosophie von *Descartes* ab grundsätzlich festgehalten; dennoch suchte sie immer wieder in der Metaphysik den Zugang zum Reich des Absoluten, und noch auf *Kant*, der ein für allemal den Riegel vorschieben wollte, folgten *Fichte*, *Schelling*, *Hegel*. Es ist nicht zu leugnen, daß in uns ein vom bloß phänomenalen Standpunkt schlechterdings unverständliches theoretisches Bedürfnis lebendig ist, das zur *Totalität* drängt. Gerade die Mathematik zeigt das mit besonderer Deutlichkeit. Aber aus ihr mögen wir auch lernen, daß jenem Bedürfnis Befriedigung werden kann nur unter einer Voraussetzung: wenn wir uns genügen lassen am Symbol und dem mystischen Irrtum entsagen, daß das Transzendente je in den Lichtkreis unserer schauenden Einsicht falle. Nur in der Mathematik und Physik hat bisher die theoretische Konstruktion solche Festigkeit gewonnen, daß sie zwingend ist für jeden, dessen Geist jenen Wissenschaften sich öffnet. Darauf beruht vorwiegend ihr philosophisches Interesse.

Will man zum Schluß ein kurzes Schlagwort, welches den lebendigen Mittelpunkt der Mathematik trifft, so darf man wohl sagen: sie ist die *Wissenschaft vom Unendlichen*. Die Spannung zwischen dem Endlichen und Unendlichen für die Erkenntnis der Wirklichkeit fruchtbar gemacht zu haben, ist die große Leistung der Griechen. Welche Bedeutung diese Spannung — und die Versuche zu ihrer Überwindung — für die Geschichte der theoretischen Erkenntnis besaß und besitzt, sollte hier fühlbar gemacht werden. „Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig" (*Hilbert*, Über das Unendliche). — Wer aber einen kurzen Überblick über die verschiedenen Formen und Problemkreise wünscht, in denen sich heute der mathematische Geist betätigt, den verweise ich auf den Artikel von *A. Voß*, Über die mathematische Erkenntnis, in der „Kultur der Gegenwart" (Teil III, Abt. 1, 1914), ferner auf *Courant* und *Robbins*, What is Mathematics? (New York 1941).

Literatur

Kant, Kritik der reinen Vernunft.

Eine gründliche Auseinandersetzung mit Kants Philosophie der Mathematik gibt *L. Couturat* in der Revue de métaphys. et morale. Mai 1904.

L. E. J. Brouwer, Mathematik, Wissenschaft und Sprache. Monatshefte d. Math. u. Phys. 36 (1929) S. 153—164.

R. Courant u. *H. Robbins*, What is mathematics? New York 1941.

H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, deutsch 2. Aufl. 1906.

B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie, 1923.

A. Voß, Über das Wesen der Mathematik, 2. Aufl. 1913.

H. Weyl, The Mathematical Way of Thinking, Univ. Penn. Bicenten. Conf. 1940; außerdem in Science 92 (1940) S. 437—446.

III. Geometrie

Wohl an keiner Stelle durchdringen sich Mathematik, Naturwissenschaft und Philosophie so innig wie im Problem des Raumes. Die von der Mathematik erarbeiteten Voraussetzungen zu seiner Diskussion sollen noch in diesem Teil kurz besprochen werden.

12. Nichteuklidische, analytische, mehrdimensionale, affine, projektive Geometrie. Der Farbraum

Über die nicht-euklidische Geometrie ist dem, was in § 4 aus Anlaß der Axiomatik gesagt wurde, nicht viel hinzuzufügen. Bei Aufrechterhaltung aller übrigen Axiome der euklidischen Geometrie bestehen die drei Möglichkeiten, daß in einer Ebene zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt unendlich viele, eine oder keine nichtschneidende Gerade existiert („hyperbolischer, parabolischer und elliptischer Fall“ nach *Klein*); die Winkelsumme im Dreieck ist entsprechend kleiner, gleich oder größer als 180^0. Die letzte Möglichkeit, auf die erst *Riemann* Mitte des 19. Jahrhunderts hinwies, besteht nur, wenn die Axiome der Anordnung dahin modifiziert werden, daß die Gerade nicht als offene, sondern als geschlossene Linie erscheint. Die ebene elliptische Geometrie ist keine andere als die, welche auf einer Kugel im euklidischen Raum gilt; nur muß man je zwei diametral gegenüberliegende Kugelpunkte identifizieren. Oder anders ausgedrückt: indem wir alle übrigen auf die Geometrie der Ebene E bezüglichen Worte in ihrem gewöhnlichen „euklidischen“ Sinne verstehen, soll allein die Bedeutung des Kongruenzbegriffes dahin modifiziert werden, daß zwei Figuren in E als „kongruent“ gelten, wenn ihre Projektionen von einem außerhalb E gelegenen Zentralpunkt O aus auf eine um O beschriebene Kugel im gewöhnlichen Sinne kongruent sind. Der Ebene müssen dabei die „unendlich fernen Punkte“ einverleibt werden, deren Projektionsstrahlen die zu E parallelen Geraden durch O sind. Die Abbildungen von E, welche „kongruente“ Figuren ineinander überführen, lassen sich auch ohne Bezugnahme auf den Raum als Kollineationen charakterisieren mit ähnlicher Invarianzeigenschaft wie im *Klein*schen Modell der *Bolyai-Lobatschewsky*schen Geometrie; und damit ist die Bahn frei zur Begründung nicht nur der ebenen, sondern auch der räumlichen elliptischen Geometrie. Das wahre Verhältnis der drei Arten von Geometrie kommt am besten zum Ausdruck, wenn man von dem maßfreien projektiven Raum seinen Ausgang nimmt und in ihn eine „*Cayley*sche Maßbestimmung“ einbaut. Je nach dem Charakter des dabei zugrunde gelegten absoluten Kegelschnitts ergibt sich die eine oder andere der drei metrischen Geometrien. So hat *Klein* selber seine Konstruktion aufgefaßt: als Einbau der *Lobatschewsky*schen Geometrie in den *projektiven*, nicht als Herstellung eines Modells durch den *metrisch-euklidischen* Raum.

Die *analytische Geometrie* führt jedes geometrische Problem auf ein algebraisches zurück. Vorbedingung dafür ist, daß der Zahlbegriff durch Aufnahme der Brüche und des Irrationalen diejenige Weite bekommen hat, welche ihn über die Zählung hinaus zur Größenmessung geeignet macht. Nicht die Griechen, sondern die Inder und Araber haben diesen Schritt vollzogen[1]). Ihren Bahnen folgte die abendländische Mathematik, die zu selbständigen Leistungen in der Geometrie erst gelangte, nachdem die Raumwissenschaft durch *Descartes*' Géométrie (1637) dem algebraischen Kalkül unterworfen war.

Heute behandelt man die analytische Geometrie wohl am besten nach dem Vorbild von *Graßmanns* „Ausdehnungslehre“ durch Heranziehung des *Vektorbegriffs*. Der Vektorkalkül ist ein Rechenverfahren, dessen Objekte nicht Zahlen, sondern geometrische Gebilde sind. Eine solche Behandlung der Geometrie war von *Leibniz* gefordert, ja zum Teil schon durchgeführt worden in seiner Schrift *de analisi situs* und dem Entwurf einer geometrischen Charakteristik (Math. Schriften V, S. 178, und II, S. 20), die in den Rahmen seiner „universellen Charakteristik“ gehören. Die Translationen oder Parallelverschiebungen des Raumes bezeichnet man als *Vektoren*. Ein Punkt A geht durch die Translation $\mathfrak{a}$ in einen Punkt $A\mathfrak{a} = B$ über, den „Endpunkt des von A aufgetragenen Vektors $\mathfrak{a}$“. Umgekehrt aber existiert, wenn A, B irgend zwei Raumpunkte sind, eine und nur eine Translation $\mathfrak{a}$, welche A in B überführt. Zu den Translationen rechnen wir insbesondere die „Identität“, welche alle Punkte fest läßt, den Vektor 0. Translationen lassen sich zusammensetzen, sie bilden eine *Gruppe;* durch Hintereinanderausführung zweier Translationen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ kommt ein Effekt zustande, der auch durch eine

[1]) *Descartes* spricht von dem „Bedenken der Alten gegen den Gebrauch von Bezeichnungen der Arithmetik in der Geometrie, welches nur daraus entspringen konnte, daß ihnen der Zusammenhang dieser beiden Disziplinen nicht hinreichend klar geworden war“.

einzige, die resultierende Translation $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ erreicht werden kann. Der Zahlbegriff dringt dadurch in die Geometrie ein, daß eine Translation $\mathfrak{a}$ iteriert, beliebig oft zu sich selbst addiert wird (vgl. den Anfang von § 5). Man erhält so, wenn man von einem Punkte A ausgeht und denselben Schritt $\mathfrak{a}$ immer wiederholt, das Gerüst einer Geraden: eine mit A anhebende äquidistante gerade Punktfolge. Die Gerade selber entsteht sozusagen durch immer erneute Ausführung derselben unendlich kleinen Translation. Wie in § 5 kommt man durch Teilung dazu, nicht nur ganzzahlige, sondern auch gebrochene Multiplikatoren λ auf den Vektor $\mathfrak{a}$ anzuwenden, und schließlich hebt die Stetigkeitsforderung die Beschränkung auf das Rationale auf. So entsteht ein axiomatischer Aufbau der Geometrie (genauer: der affinen Geometrie, in der sich nur parallele Strecken aneinander messen lassen), welcher den voll ausgebildeten Begriff der reellen Zahl voraussetzt — in ihn ist die ganze Analyse der Stetigkeit hineingeworfen — und dessen Grundbegriffe daneben allein „*Punkt*“ und „*Vektor*“ sind. Drei Grundoperationen verknüpfen diese Gegenstände: 1. zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ erzeugen einen Vektor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, 2. eine Zahl λ und ein Vektor $\mathfrak{a}$ erzeugen den Vektor $\lambda\mathfrak{a}$, 3. ein Punkt A und ein Vektor $\mathfrak{a}$ erzeugen einen Punkt $A\mathfrak{a}$. Die auf sie bezüglichen Axiome bilden nun, im Gegensatz zu den rein geometrischen Axiomen Euklids oder Hilberts, ein *System, das auch in rein logischer Hinsicht von ganz einheitlichem und durchsichtigem Bau ist;* sie fixieren, wie wir bereits in § 4 bemerkten, nichts anderes als das Operationsfeld der linearen Algebra. In ihnen enthüllt sich eine wunderbare Harmonie zwischen dem Gegebenen und der Vernunft. Und auch die einfachsten abgeleiteten geometrischen Begriffe, zu denen hier insbesondere Gerade und Ebene gehören, korrespondieren denjenigen, die vom logischen Standpunkt aus die nächstliegenden und natürlichsten sind. Alle Vektoren $\mathfrak{x}$, welche aus zwei gegebenen $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ nach der Formel

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 \qquad (*)$$

entspringen mit beliebigen Zahlkoeffizienten x_1, x_2, bilden eine „lineare Schar 2. Stufe“; um der Eindeutigkeit der Darstellung (*) willen ist dabei vorausgesetzt, daß $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ linear unabhängig sind, d. h. der Ausdruck rechts nur dann den Vektor 0 ergibt, wenn x_1 und x_2 beide $= 0$ sind. Trägt man alle diese Vektoren $\mathfrak{x}$ von einem festen Anfangspunkt O aus ab, so bilden die Endpunkte $O\mathfrak{x} = P$ ein „lineares Gebilde 2. Stufe“ oder eine *Ebene*. Das *Koordinatensystem* besteht hier aus dem Punkt O und den beiden linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$. Relativ zu diesem wird der Punkt P durch die „*Koordinaten*“ x_1, x_2 charakterisiert. Analog können konstruiert werden lineare Vektorscharen und lineare Punktgebilde der 1., 2., 3., ... Stufe (Gerade, Ebene, ...).

Und erst hier tritt nun der *Dimensionsbegriff* auf: im wirklichen Raum können wir über die Stufenzahl 3 nicht hinaus; es existieren in ihm wohl 3, aber nicht mehr voneinander linear unabhängige Vektoren. Der ganzen in unserem Axiomensystem zum Ausdruck kommenden durchsichtigen Gesetzmäßigkeit gegenüber erscheint diese Dimensionszahl 3 als ein *Zufall.* Ohne weiteres können wir die Zahl 3 durch irgendeine Dimensionszahl n ersetzen, indem wir postulieren: Es existieren n, aber nicht mehr voneinander linear unabhängige Vektoren. Ein Koordinatensystem für den Raum besteht dann aus einem Anfangspunkt O und n solchen Vektoren. Für $n = 1, 2, 3$ ergeben sich bzw. die Geometrie der Gerade, der Ebene, des Raumes. Erst auf Grund einer solchen durch Formalisierung zwingend gewonnenen n-dimensionalen Geometrie hat das *Problem der Dimensionszahl*, die Frage einen Sinn: Durch welche inneren Eigentümlichkeiten ist der Fall $n = 3$ ausgezeichnet? Wenn Gott bei Erschaffung der Welt dem Raume gerade 3 Dimensionen verlieh, läßt sich dafür durch Aufdeckung solcher Eigentümlichkeiten irgendein „vernünftiger“ Grund angeben?

Trägt man alle Vektoren von einem festen Anfangspunkt O aus ab, so sieht man, daß die Geometrie der Vektoren identisch ist mit der (affinen) Geometrie des mit einem absoluten Zentrum O versehenen Raumes. Identifiziert man alle Vektoren, welche auseinander durch Multiplikation mit Zahlen hervorgehen, verwendet als Elemente also die durch O gehenden Strahlen, so entsteht aus der n-dimensionalen Vektorgeometrie die $(n - 1)$-dimensionale *projektive* Geometrie (des Strahlenbüschels in O).

Die projektive Geometrie gilt im Kontinuum der uns anschaulich gegebenen *Farbqualitäten.* (Die Mannigfaltigkeit der verschiedenen objektiven physikalischen Farben hat unendlich viele Dimensionen; das normale, nicht farbblinde Auge entwirft davon, indem eine ungeheure Mannigfaltigkeit physikalisch verschiedener Farben denselben Farbeindruck hervorruft, eine 2-dimensionale „Projektion“.) Zwei in bestimmter Intensität gegebene Farben erzeugen durch Zusammenfügen (Mischen) eine bestimmte neue Farbe in bestimmter Intensität. Die Intensitäten einer Farbe lassen sich miteinander vergleichen, so daß nach vorgenommener Wahl einer Einheitsintensität jede durch eine Maßzahl gekennzeichnet werden kann (indem nämlich durch wiederholte Zusammenfügung einer Farbe in der Einheitsintensität mit sich selbst eine Skala der Intensitäten ohne Qualitätsänderung entsteht). Hingegen sind die Intensitäten zweier verschiedener Farbqualitäten unvergleichbar. Die mit Intensitäten behafteten Farben erfüllen also die Axiome der Vektorgeometrie, wobei der Mischung die Addition korrespondiert, für die Farbqualitäten gilt mithin die projektive Geometrie. Alle durch Mischung aus drei Grundfarben A, B, C entstehenden Farben bilden das „Dreieck" ABC. Als zweidimensional erweist sich der Farbraum durch den Umstand, daß drei Grundfarben durch Mischung alle andern erzeugen, oder daß wenigstens aus solchen Dreiecken sich das ganze Farbfeld zusammensetzen läßt. Die wirklichen Farben erfüllen nämlich nur einen beschränkten Ausschnitt der ganzen projektiven Ebene. Aber man kann ihn, wie wir das in § 2 geschildert haben, ideell zur vollen projektiven Ebene erweitern; und man muß für die Grundfarben A, B, C ideelle Farben wählen, wenn das Feld der wirklichen Farben ganz in das Dreieck ABC hineinfallen soll. Die reinen Spektralfarben liegen in der projektiven Farbebene auf einer krummen Kurve, deren äußerste Enden sich sehr nahe kommen und durch das Purpur überbrückt werden. — Es ist für die philosophische Diskussion der Geometrie wichtig, daß neben dem Raum noch ein ganz anderes Gebiet anschaulicher Gegebenheiten besteht: die Farben, welche ein geometrischer Behandlung fähiges Kontinuum bilden.

Literatur

H. v. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik. 3 Bände. 3. Aufl. Hamburg u. Leipzig 1909—1911, § 20.

F. Klein, Über die sog. nicht-euklidische Geometrie. Ges. math. Abhandlg. I, Berlin 1921, S. 254—305, 311—350.

O. Veblen u. *J. W. Young*, Projective Geometry. 2 Bände, New York 1910—1918.

H. Weyl, Raum Zeit Materie, 5. Aufl. 1923, §§ 1—4.

13. Das Relativitätsproblem

Unser Wissen steht unter der Norm der *Objektivität*. Wer an die euklidische Geometrie glaubt, wird sagen, alle Punkte im Raum seien objektiv gleich, ebenso alle möglichen Richtungen. Newton indessen scheint gedacht zu haben, der Raum besitze ein absolutes

Zentrum. Epikur denkt sicher, die Vertikale lasse sich objektiv von allen andern Richtungen unterscheiden. Als Grund führt er an, daß sich alle sich selbst überlassenen Körper in ein und derselben Richtung bewegen. Somit ist die Feststellung, eine Linie verlaufe vertikal, elliptisch oder unvollständig, wobei die dahinter stehende vollständige Feststellung etwa so lautet: die Linie hat die Richtung der Schwerkraft im Punkte *P*. Somit geht das Schwerefeld, von dem wir wissen, daß es von der Zusammensetzung der Materie der Welt abhängt, in die vollständige Aussage als Zufallsfaktor ein, ebenso auch ein einzeln angedeuteter Punkt *P*, auf den wir mit dem Finger bei einem demonstrativen Akt weisen, der in Wörtern wie „ich", „hier", „jetzt", „dies" zum Ausdruck kommt. Nur wenn wir sicher sind, daß die Wahrheit der vollständigen Feststellung nicht durch freie Variation der Zufallsfaktoren und solcher Faktoren, die einzeln aufgedeckt werden (wie etwa das Schwerefeld und der Punkt *P*) beeinflußt wird, haben wir das Recht, diese Faktoren aus der Feststellung wegzulassen und noch objektive Bedeutung dafür zu beanspruchen. Epikurs Glaube geht dahin, sobald festgestellt wird, daß die Richtung der Schwerkraft in Princeton anders verläuft als in Kalkutta, und daß sie sich außerdem durch eine Umverteilung der Materie ändern kann. Ohne Anspruch auf ein mechanisch anwendbares Kriterium bestätigt unsere Schilderung die wesentliche Tatsache, daß Objektivität etwas ist, das nur auf dem Boden der Erfahrung entscheidbar ist. So erklären sich auch zwei Hauptquellen für die so oft in der Geschichte der Wissenschaften begangenen Irrtümer, nämlich eine Feststellung für objektiv zu nehmen, ohne daß sie es ist: 1. man hat bestimmte sachliche Umstände übersehen, von denen der Sinn der Feststellung abhängt, obgleich sie nicht explizit in ihrer elliptischen Form erwähnt sind; 2. man hat, auch wenn diese Umstände oder Faktoren erkannt wurden, nicht sorgfältig genug untersucht, ob durch deren Variation die Wahrheit der Aussage beeinflußt wird. Kein Wunder, daß in mehreren Phasen im Verlaufe der Geschichte der Naturwissenschaften das Gebiet dessen, was als objektiv angesehen wurde, zusammengeschrumpft ist.

Während die philosophische Frage der Objektivität nicht leicht klar und definit beantwortet werden kann, kennen wir exakt die adäquaten mathematischen Begriffe für die Formulierung dieser Idee. Wir gehen von einer vollständig axiomatisierten Wissenschaft wie der euklidischen Geometrie aus. Der Einfachheit halber nehmen wir nur eine fundamentale Kategorie an, nämlich die Raumpunkte. Nach Hilbert wären dann die Grundrelationen, die in die Axiome eingehen, 1. die ternäre Relation: drei Punkte liegen auf einer geraden Linie; 2. die Relation: (drei verschiedene Punkte A, B und C liegen auf einer geraden Linie und) B liegt zwischen A und C; 3. die Relation: vier Punkte liegen in einer Ebene; 4. die Kongruenzrelation $AB \equiv CD$ zwischen zwei Punktepaaren AB und CD. Was wir damit sagen wollen, läßt sich auf jeden Bereich von Dingen anwenden, dessen Axiome ein paar Grundrelationen behandeln. Ohne vorzugreifen, was nun diese Dinge sind, können wir sie Punkte nennen und vom Sachbereich somit als dem Punktfeld sprechen.

In § 4 ist der Begriff der isomorphen Abbildung eingeführt worden. Wir betrachten nun den Sonderfall, daß unser Sachgebiet nicht auf ein anderes Gebiet, sondern auf sich selbst abgebildet wird, und gelangen so zum Begriff des *Automorphismus:* Automorphie ist eine eineindeutige oder umkehrbar eindeutige Abbildung $p \to p'$ des Punktfeldes auf sich selbst, die die Grundrelationen ungestört läßt; das heißt, stets wenn Punkte $a, b, \ldots$ der Grundrelation $R(ab \cdots)$ genügen, dann genügen auch die Punkte $a', b', \ldots$, in die a, b durch die Abbildung übertragen werden, der gleichen Relation, und umgekehrt. Mit andern Worten, aus $R(ab \cdots)$ folgt $R(a'b' \cdots)$, und aus $R(a'b' \cdots)$ folgt $R(ab \cdots)$. Eine Abbildung σ überträgt jeden Punkt des Punktfeldes in einen Punkt $p' = p\sigma$. Die einfachste Abbildung ist die Identität ι, die jeden Punkt p in p selbst überträgt. Zwei Abbildungen $\sigma : p \to p'$ und $\tau : p' \to p''$ können nacheinander ausgeführt und dann als neue Abbildung $\sigma\tau : p \to p''$ aufgefaßt werden. Eine Abbildung $\sigma : p \to p'$ ist eineindeutig, wenn sie eine Inverse σ^{-1} besitzt, die p' zurück nach p abbildet: $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \iota$. Dann ist auch σ^{-1} eineindeutig. Die Identität ist eine eineindeutige Abbildung; und wenn σ und τ eineindeutige Abbildungen sind, so ist es auch $\sigma\tau$ mit der Inversen $\tau^{-1}\sigma^{-1}$. Das Wort Transformation wird als Synonym für eineindeutige Abbildung verwendet. Die fundamentale Eigenschaft für Automorphismen ist, daß sie eine *Gruppe* bilden. Dies bedeutet die drei folgenden Dinge: 1. Die Identität ist ein Automorphismus; 2. ist σ ein Automorphismus, dann auch σ^{-1}; 3. sind σ und τ Automorphismen, dann ist auch $\sigma\tau$ einer. Diese drei Tatsachen folgen unmittelbar aus der Definition.

Eine Figur F im weitesten Sinne oder eine Konfiguration von Punkten ist nichts anderes als eine Punktmenge; F ist gegeben, wenn für jeden Punkt p bestimmt ist, ob er zu F gehört oder nicht. Eine ternäre Relation $R\,(xyz)$ zwischen Punkten heißt *invariant* gegenüber einer gegebenen Transformation $\sigma : p \rightarrow p'$ und ihrer Inversen $p' \rightarrow p$, wenn aus $R\,(abc)$ stets $R\,(a'b'c')$ folgt, und umgekehrt. Nun können wir exakt sagen, was mit objektiver Gleichheit oder „Unterschiedslosigkeit" aller Punkte im euklidischen Raum gemeint ist. Sie bedeutet, daß für zwei beliebige Punkte p_1 und p_0 stets ein Automorphismus existiert, der p_0 in p_1 überführt. Zwei Figuren F und F' heißen *ähnlich*, wenn die eine durch einen Automorphismus in die andere überführt werden kann. Dies ist nun unsere Deutung der Leibnizschen Definition ähnlicher Figuren als solche, die nicht auseinandergehalten werden können, wenn sie jede für sich betrachtet werden. Die drei Gruppenpostulate stellen schlicht fest, daß jede Figur sich selbst ähnlich ist, und daß die Ähnlichkeit symmetrisch und transitiv ist (s. die Äquivalenzaxiome auf S. 23). Eine Punktrelation heißt objektiv, wenn sie gegenüber allen Automorphismen invariant ist. In diesem Sinne sind die Grundrelationen objektiv, ebenso alle logisch aus ihnen nach den in § 1 angegebenen Prinzipien definierten Relationen, vorausgesetzt es wird kein Gebrauch von Prinzip Nr. 5 gemacht, das eine Leerstelle zuläßt, die von einem individuell aufgewiesenen Punkt ausgefüllt wird. (Ob jede objektive Relation so definiert werden kann, wirft eine Frage der logischen Vollständigkeit auf, die wohl kaum als entsprechende Frage der Vollständigkeit für Axiome in der Form beantwortet werden kann, ob jede wahre allgemeine Aussage über Punkte aus den Axiomen geschlossen werden kann.)

Lautet unsere Aufgabe den wirklichen Raum zu untersuchen, so sind uns weder die Axiome noch die Grundrelationen gegeben. Im Gegenteil: Bei unserem Versuch, die Geometrie zu axiomatisieren, wählen wir als unsere Grundrelationen einige von den Punktrelationen aus, von denen wir überzeugt sind, daß sie objektive Bedeutung besitzen (Epikur hätte zum Beispiel die Grundrelation mit aufgenommen: A, B liegen auf einer Vertikalen; Euklid hat das nicht getan). Um also dem wahren Sachverhalt gerecht zu werden, müssen wir wohl die Reihenfolge in der Entwicklung unserer Gedanken umkehren. Wir gehen von einer Transformationsgruppe Γ aus. Sie beschreibt sozusagen, bis zu welchem Grade unser Punktfeld homogen ist. Ist die Gruppe einmal gegeben, so wissen wir, was Gleichheit oder Ähnlichkeit bedeutet, nämlich: zwei Figuren sind ähnlich (oder gleich, oder äquivalent), die durch eine Transformation von Γ auseinander hervorgehen; ferner, unter welchen Bedingungen eine Relation objektiv ist, nämlich dann, wenn sie gegenüber allen Transformationen von Γ invariant ist. In diesem Sinne hat Felix Klein in seinem berühmten Erlanger Programm (1872) die Formulierung gemeint, eine Geometrie sei durch eine Transformationsgruppe bestimmt. Die Frage der Axiomatisierung dieser Geometrie ist damit auf den Hintergrund zurückgeführt. (Als erster Schritt müßten ein paar objektive Relationen $R_1, R_2, \ldots$ aufgesucht werden, so daß dabei die Gruppe aller Transformationen, die $R_1, R_2, \ldots$ invariant lassen, nicht größer als Γ wird, sondern mit Γ zusammenfällt.) Während wir unsere Augen nicht vor der Tatsache verschließen müssen, daß objektive Relationen logisch aus anderen derartigen Relationen konstruiert werden können, verzichten wir darauf, einen Unterschied zwischen Grundrelationen und abgeleiteten zu machen. Wir sind an allen invarianten Relationen gleich interessiert.

Hätte Newton recht mit seinem absoluten Zentrum O des Raumes, so bestünde die wahre Gruppe Γ_0 der Automorphismen aus den Transformationen der euklidischen Gruppe Γ von Automorphismen, die O fest lassen; Newtons Γ_0 ist eine Untergruppe der euklidischen Gruppe Γ. Andererseits sind wir bei der Untersuchung der euklidischen Geometrie in erster Linie an solchen Eigenschaften interessiert, die gegenüber allen affinen oder allen projektiven Transformationen invariant sind. (Die affinen bzw. die projektiven Transformationen der Ebene sind solche, die sich ergeben, wenn man nacheinander eine Anzahl Parallelprojektionen bzw. Zentralprojektionen ausführt.) Die Gruppen Γ' und Γ''

dieser Transformationen sind umfassender als Γ; genauer: Γ ist ein Teil von Γ', und Γ' ein Teil von Γ''. Die Wichtigkeit der affinen und der projektiven Geometrie für die Theorie der Perspektive ist offenkundig. Man sieht, wie nützlich sich der Kleinsche Standpunkt für eine geordnete Übersicht erweist, und bei der Aufdeckung der gegenseitigen Beziehungen werden verschiedene Arten von Geometrien entweder durch die Natur der Dinge angeregt, oder sie entspringen aus einer willkürlichen, aber logisch nützlichen Abstraktion. (Ein Vorgänger von Klein war Möbius, der den gruppentheoretischen Standpunkt für eine Anzahl bestimmter Arten von Geometrie betonte.) Die umfangreichste Automorphismengruppe, die man möglicherweise für ein Kontinuum betrachten kann, besteht aus allen kontinuierlichen Transformationen; die entsprechende Geometrie heißt Topologie. Für die Entwicklung der Mathematik war es ein glücklicher Zufall, daß das Relativitätsproblem nicht zuerst für den kontinuierlichen Punktraum, sondern für ein System angepackt wurde, das aus einer endlichen Anzahl verschiedener Dinge bestand, nämlich dem System der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten (Galoissche Theorie). Dieser Umstand war ein Segen für die Exaktheit der entsprechenden Begriffsbildungen. Die objektiven Relationen sind hier solche, die sich aus den vier Grundoperationen der Algebra aufbauen lassen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division), mit andern Worten, die algebraischen Relationen mit rationalen Koeffizienten. Aus Problemen dieser Art entstand eine allgemeine Theorie, nicht lediglich der Transformationsgruppen, sondern auch der abstrakten Gruppen.

Nach dieser Erklärung der Automorphismen kommen wir nun zu einer zweiten Phase des Relativitätsproblems. Wie lassen sich den Punkten eines Punktfeldes Kennzeichen oder Marken zuordnen, die zur Identifizierung oder Unterscheidung der Punkte dienen können? Die Marken sollen selbsterzeugende, verschiedene und stets reproduzierbare Symbole sein wie Namen, Zahlen (oder Zahlentripel x, y, z) usw. Erst dann kann man daran denken, das Schauspiel der wirklich gegebenen Welt durch Konstruktion in einem Symbolfeld darzustellen. Alles Wissen, auch wenn es von der intuitiven Beschreibung ausgeht, tendiert zu einer symbolischen Konstruktion. Auf ernste Schwierigkeiten stößt man so lange nicht, wie man es mit einem Bereich von einer nur endlichen Anzahl Punkte zu tun hat, die man nacheinander „aufrufen“ kann.

Das Problem wird ernst, wenn das Punktfeld unendlich wird, insbesondere wenn es ein Kontinuum ist. Eine begriffliche Festlegung von Punkten durch Marken der oben geschilderten Art, die die Rekonstruktion jedes einmal verlorenen Punktes ermöglichte, ist hier nur in Verbindung mit einem *Koordinatensystem* oder einem Bezugsrahmen möglich, was durch einen individuellen demonstrativen Akt aufgewiesen werden muß. Die Objektivierung durch Ausschaltung des Ich und seines unmittelbaren Lebens der Anschauung gelingt nicht restlos, und das Koordinatensystem bleibt als das notwendige Residuum der Ich-Vernichtung[1]). Es ist gut hier daran zu erinnern, daß praktisch zwei- oder dreidimensionale Punktmengen gewöhnlich so gegeben werden, daß man sich tatsächlich einen Körper oder eine Figur mit Bleistift auf Papier gezeichnet vor Augen hält, und nicht durch eine logisch-arithmetische Konstruktion von mengendefinierenden Eigenschaften. Die Mathematik hat lange gebraucht, bis sie sich die konstruktiven Hilfsmittel erworben hatte, um mit der Komplexität und Vielfalt solcher anschaulich gegebener Figuren fertig zu werden. Nachdem sie jedoch dieses Stadium erreicht hatte, wurde die Überlegenheit ihrer symbolischen Methoden offenkundig.

Als Beispiel nehmen wir die Punkte auf einer Geraden. Das Koordinatensystem besteht hier aus einem Anfangspunkt O und einer Einheitsstrecke OE oder aus zwei verschiedenen Punkten O und E. Ist dieser Bezugsrahmen gegeben, kann jeder beliebige Punkt P durch seine Abszisse x gekennzeichnet werden, das ist die Maßzahl der mit der Einheitsstrecke OE ausgemessenen Länge OP (x ist positiv für die Punkte auf der gleichen Seite von O aus wie E und negativ für die Punkte auf der anderen Seite). Zwei Bezugsrahmen, OE und $O'E'$, sind objektiv gleichwertig; denn es gibt genau einen Automorphismus (Ähnlichkeit), der O auf O' und E auf E' abbildet. Infolgedessen ist durch Aufweisung eines individuellen Koordinatensystems nicht mehr als unbedingt not-

---

[1]) Man könnte gegen die Statuierung eines prinzipiellen Unterschiedes zwischen begrifflicher Fixierung und anschaulicher Aufweisung den Einwand erheben, daß doch auch die objektiven geometrischen Relationen, auf welche sich die begriffliche Bestimmung gründet, in der Anschauung aufgewiesen werden müssen. Aber das sind einige wenige Relationsbegriffe, während die Punkte selber ein *Kontinuum* bilden; es muß zugegeben werden, daß nur hierin der prinzipielle Unterschied besteht.

wendig aufgewiesen. Das Feld für das Symbol x besteht aus allen reellen Zahlen. In bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem ist die Zuordnung $P \leftrightarrows x$ eine eineindeutige Abbildung des Punktfeldes auf den Variabilitätsbereich des Symbols. Die Koordinaten x und x' eines beliebigen Punktes in zwei Koordinatensystemen sind durch eine Relation $x = ax' + b$ miteinander verbunden, wo $a \neq O$ und b zwei Konstante sind, die die relative Lage der beiden Koordinatensysteme zueinander kennzeichnen.

Mit diesem Beispiel vor Augen können wir nun die folgende allgemeine Beschreibung verstehen. Es sei eine Klasse Σ von Bezugsrahmen f gegeben. Die Klasse als solche sollte objektiv unterschieden werden können, das heißt wenn f zu ihr gehört, dann auch jeder ähnliche Rahmen $f\sigma = f'$, der aus f durch einen Automorphismus σ hervorgeht. Die Klasse soll jedoch nicht mehr Elemente enthalten, als diese Forderung unbedingt notwendig macht, das heißt zwei beliebige Rahmen f, f' der Klasse sind ähnlich. Außerdem soll eine objektive Vorschrift A gegeben sein, nach der jeder Punkt p in bezug auf jeden Rahmen f der Klasse Σ ein definites (reproduzierbares) Symbol $x = A(p; f)$ als Koordinate bestimmt. Für ein gegebenes f ist die Zuordnung $p \rightleftarrows x$ zwischen den Punkten p und den Symbolen x umkehrbar eindeutig. Daß x durch p und f objektiv bestimmt ist, bedeutet, daß

$$A(p; f) = A(p\sigma; f\sigma) \tag{*}$$

für jeden Automorphismus zutrifft.

Aus diesen Bedingungen ergeben sich die folgenden Folgerungen. Es sei σ ein Automorphismus $p \to p'$ des Punktfeldes und f ein fester Rahmen der Klasse Σ. Die Koordinaten x von p und x' von p' in diesem Rahmen sind durch eine Transformation S, $x' = xS$, miteinander verbunden, die den Automorphismus σ durch f darstellt. Der Identität $\sigma = \iota$ entspricht die Identität $S = I$; σ^{-1} und $\sigma\tau$ werden durch S^{-1} und ST dargestellt, wenn σ und τ durch S und T dargestellt werden. In diesem Sinne bilden die Transformationen S, die den verschiedenen σ von Γ entsprechen, eine Gruppe G, die isomorph zu Γ ist. G ist nichts anderes als die Darstellung von Γ mittels f. Nehmen wir andererseits einen festen Rahmen f unserer Klasse Σ und einen beliebigen Rahmen $f' = f\sigma$, der aus f durch den Automorphismus σ hervorgeht; ich behaupte nun, daß die Koordinaten x und x' des gleichen beliebigen Punktes in bezug auf f und f' durch die Gleichung $x = x'S$ miteinander verknüpft sind. Bezeichnen wir nämlich den beliebigen Punkt mit $p\sigma$ statt mit p, so haben wir $x = A\,(p\sigma; f)$ und wegen (*)

$$x' = A(p\sigma; f\sigma) = A(p; f),$$

und daraus folgt unsere Behauptung. Die Gruppe $\boldsymbol{G}$, die Γ mittels f darstellt, muß unabhängig von f sein. Tatsächlich würde eine Darstellung von Γ durch zwei verschiedene Gruppen $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}^*$ mittels den beiden ähnlichen Rahmen f und f^* einen objektiven Unterschied zwischen f und f^* erscheinen lassen, was unmöglich ist. Es ist leicht dies explizit zu bestätigen. Es sei $f^* = f\gamma$, wo γ ein Automorphismus ist. Außerdem seien x und x' die Koordinaten eines beliebigen Punktes p und seines Bildes $p' = p\sigma$ in bezug auf f, und y und y' in bezug auf f^*. Die Transformationen, die γ und σ mittels f darstellen, heißen C und S. Wir schreiben nun die Gleichung $x' = xS$ in der einprägsameren Form $x \overset{(S)}{\rightarrow} x'$. Nach dem Gesagten erhalten wir nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & x \overset{(S)}{\rightarrow} x' & \\ (C) & \uparrow \quad\; \downarrow & (C^{-1}). \\ & y \quad\;\; y' & \end{array}$$

Folglich ist die Transformation, die y in y' überführt und somit mittels des Rahmens f^* darstellt, $S^* = CSC^{-1}$. Mit S gehört auch $CSC^{-1} = S^*$ zur Gruppe $\boldsymbol{G}$, und umgekehrt ist $S = C^{-1}S^*C$.

Solange die Punkte nicht begrifflich gekennzeichnet werden konnten, konnten es auch die Transformationen des Punktfeldes nicht, und es war vielleicht auch nicht ganz klar, was mit der Aussage gemeint war, die Automorphismengruppe sei bekannt oder gegeben. Nun ist ein Stadium erreicht, wo dieser letzte Anflug von Unklarheit verschwindet. Jeder einzelne Punkt wird durch seine Koordinate x (in bezug auf einen festen Rahmen) ersetzt, und somit erscheint die Gruppe Γ der Automorphismen σ als Gruppe $\boldsymbol{G}$ der Transformationen S. Die individuelle Transformation S, die x in $x' = xS$ überführt, ist ein reproduzierbares

Symbol wie jeder einzelne individuelle Wert von x. Aber während die Koordinate x nicht nur von p, sondern auch von f abhängt, ist die Gruppe $\boldsymbol{G}$ unabhängig von f und somit frei von jeder Notwendigkeit individueller Aufweisung. Um die Forderung der Objektivität zu erfüllen, konstruieren wir ein Bild von der Welt in Symbolen. Der reine Mathematiker drückt das so aus: Ist eine Gruppe $\boldsymbol{G}$ von Transformationen in einem Feld von Symbolen gegeben, so wird eine Geometrie durch die Übereinkunft aufgestellt, nur solche Relationen in dem Feld als objektiv zu untersuchen und zu betrachten, die gegenüber den Transformationen von $\boldsymbol{G}$ invariant sind.

Eine letzte Bemerkung rein logischer Natur bezieht sich auf die Rahmen. Es ist ganz rechtmäßig, als Bezugsrahmen f die von f gebildete Koordinatenzuordnung $p \rightarrow x = f(p)$ selbst zu betrachten. Dies scheint sogar zweckmäßig zu sein, wenn man auf eine so umfangreiche Automorphismengruppe gefaßt sein muß, die alle kontinuierlichen Transformationen enthält. Das Symbol f ist dann einfach ein Zeichen für die Funktion f, deren Argumentbereich sich über die Punkte p erstreckt, und deren Wert ein Element x im Symbolfeld ist. Ist $\sigma : p \rightarrow p'$ eine beliebige Transformation, dann wird die transformierte Funktion $f' = f\sigma$ durch die Gleichung $f'(p') = f(p)$ für $p' = p\sigma$ oder $f'(p) = f(p\sigma^{-1})$ definiert. Schreiben wir $x = A(p; f)$ für $x = f(p)$, dann ist mit A der allgemeine logische Operator „Wert von" gemeint. $x = A(p; f)$ bedeutet: x ist der Wert der Funktion f für das Argument p.

LITERATUR

F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. (Gesammelte mathematische Abhandlungen I, S. 460—497.)

14. Kongruenz und Ähnlichkeit. Links und rechts

Ohne Zweifel rührt die Überzeugungskraft, die die euklidische Geometrie für uns besitzt, von unserer Vertrautheit im Umgang mit solchen Körpern her, die wir starr nennen, und von denen man sagen kann, sie blieben unter sich ändernden Bedingungen gleich. Die Raumstücke, die ein solcher Körper in zwei möglichen

Lagen ausfüllt, heißen *kongruent*. Das Messen ist von starren Körpern im gleichen Grade abhängig wie das Zählen vom Gebrauch konkreter Zahlensymbole. (Über die physikalische Begründung der Geometrie s. auch §§ 16 und 18.) Ist eine Geometrie einmal vom Verhalten wirklicher, angenähert starrer Körper abstrahiert worden, so liefert sie eine Norm für die physikalische Untersuchung aller Körper, und wir können beurteilen, wie weit ein gegebener Körper das Ideal der Starrheit verwirklicht. Dieser Vorgang unterscheidet sich nicht wesentlich von dem, bei welchem sich eine Temperaturskala zunächst auf das Verhalten wirklicher Gase stützt und dann auf die „ideale Gasskala" reduziert wird, wobei die exakte Gültigkeit solcher Gesetze postuliert wird, die von den existierenden Gasen nur näherungsweise befolgt werden. Da die Orte bei einem starren Körper angemerkt werden können, ist die Kongruenz eine punktweise Abbildung zweier kongruenter Volumina V und V'. Zunächst bezieht sich der Kongruenzbegriff auf einen gegebenen starren Körper b. Seine faktische Unabhängigkeit von b ist eine unserer fundamentalsten Erfahrungen. Es seien nämlich V und V' zwei Raumstücke, die vom Körper b in zwei seiner Lagen ausgefüllt werden. b^* sei ein anderer Körper, der in V hineinpaßt; er kann dann so bewegt werden, daß er V' ausfüllt. Da man einen starren Körper so groß machen kann, daß er einen beliebig gegebenen Punkt überdeckt, kann die Abbildung $V \rightarrow V'$ auf den ganzen Raum erweitert werden. Die kongruenten Abbildungen des Raumes bilden eine Gruppe Δ^+ von Transformationen, die wir die *Gruppe der euklidischen Bewegungen* nennen. Ist diese Gruppe einmal bekannt, so können kongruente Volumina als Raumstücke definiert werden, die ineinander durch eine Transformation S von Δ^+ überführt werden können. Die Tatsachen legen eine Deutung nahe, nach welcher die Gruppe Δ^+ der kongruenten Abbildungen eine innere Struktur des Raumes selbst zum Ausdruck bringt, und zwar eine Struktur, die vom Raum allen Raumobjekten aufgeprägt wird.

Falls diese Ansicht zutrifft, sollte die Kongruenz eigentlich zum einzigen Grundbegriff der Geometrie gemacht werden. Untersuchen wir zuerst einmal, welche Konsequenzen diese Auffassung von der Geometrie für die Automorphismen des Raumes (Ähnlichkeiten) hat. Wir wissen ganz allgemein, daß die Gruppe Γ der Automorphismen dann festliegt, wenn die Begriffe für die Grundrelationen einer Geometrie festliegen. In unserem Falle lautet das Kriterium für einen Automorphismus so: sowohl C als auch C^{-1} müssen jedes Paar kongruenter Raumstücke v_1, v_2 in ein kongruentes Paar transformieren. Wir betrachten das Paar v_1^*, v_2^*, das durch die Transformation C aus v_1, v_2 entsteht. S sei die Bewegung, die v_1 in v_2 überführt. Wie das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \xrightarrow{(S)} & v_2 \\ (C^{-1}) \uparrow & & \downarrow (C) \\ v_1^* & & v_2^* \end{array}$$

anzeigt, geht v_1^* durch die Abbildung $C^{-1}SC$ in v_2^* über. Folglich erfordert das Kriterium, daß immer dann, wenn S zu Δ^+ gehört, auch die Transformationen $C^{-1}SC$ und CSC^{-1} dazu gehören. Eine Transformation heißt mit einer gegebenen Transformationsgruppe Δ vertauschbar, wenn mit S auch $C^{-1}SC$ und CSC^{-1} zu Δ gehören. Die mit Δ vertauschbaren Transformationen bilden eine Gruppe, den *Normalisator* von Δ. Diese Gruppe enthält notwendig Δ als Untergruppe, sei es, daß Δ identisch mit seinem Normalisator oder ein echter Teil davon ist. Unsere Analyse kann nun so zusammengefaßt werden: *Die Gruppe Γ der Ähnlichkeiten ist der Normalisator der Gruppe Δ^+ der Bewegungen.* Kongruente Figuren sind also notwendig ähnlich. Die Umkehrung muß nicht gelten. Ist nämlich Δ^+ tatsächlich eine echte Untergruppe des Normalisators, so existieren ähnliche Figuren im euklidischen Raum, die nicht kongruent sind. Beispiele dafür sind ein Körper und sein Spiegelbild, oder ein Gebäude und ein kleinmaßstäbiges Modell davon.

Nun wollen wir das Verfahren umkehren und Klein folgen, indem wir von einer gegebenen Automorphismengruppe ausgehen. Wir nehmen eine Untergruppe Δ von Γ und erklären zwei Figuren für Δ-äquivalent, wenn durch eine Transformation von Δ die eine in die andere überführt wird. Unter welchen Umständen besitzt nun diese Relation der Δ-Äquivalenz objektive Bedeutung? Dann und nur dann, wenn Δ-äquivalente Figuren durch jede Transformation C von Γ in Δ-äquivalente Figuren überführt werden, oder mit andern Worten, wenn jedes Element C von Γ mit Δ vertauschbar ist. In diesem Falle sagt der Mathematiker, Δ sei eine invariante Untergruppe von Γ. Infolgedessen ist die Δ-Äquivalenz dann eine objektive Relation, wenn Δ eine invariante Untergruppe von Γ ist. Zum Beispiel bilden die Parallelverschiebungen eine invariante Untergruppe der Gruppe der euklidischen Ähnlichkeiten; denn tatsächlich besitzt die Relation // zwischen zwei Figuren, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, objektive geometrische Bedeutung — obgleich ein passendes Wort dafür in unserer Sprache fehlt. Der Normalisator der Gruppe der Parallelverschiebungen besteht aus allen affinen Transformationen; es muß also möglich sein, die affine Geometrie auf der einen Relation // zwischen Figuren aufzubauen. Oder noch einfacher, die allein aus der Identität bestehende Untergruppe ist eine invariante Untergruppe, und tatsächlich ist die Relation der Identität zwischen zwei Figuren von objektiver Bedeutung. (Es gibt gar keine mit einem besseren Anspruch auf Objektivität ,weil ja die Identität in jeder möglichen Transformationsgruppe Γ enthalten ist.) Je kleiner die Gruppe Δ ist, desto größer ist ihr Normalisator, und um so größer ist die Kluft zwischen Kongruenz und Ähnlichkeit; oder genauer, ist Δ' eine Untergruppe von Δ, dann enthält der Normalisator Γ' von Δ' den Normalisator Γ von Δ. Der Normalisator einer invarianten Untergruppe Δ von Γ umfaßt stets Γ. Eine Geometrie, deren Automorphismengruppe Γ ist, kann *allein* auf die objektive Relation der Δ-Äquivalenz aufgebaut werden, vorausgesetzt, der Normalisator von Δ ist nicht größer als Γ, sondern fällt mit Γ zusammen.

Eine letzte Bemerkung möge diese Analyse beschließen. Der Raum ist ein Kontinuum, und wenn wir von einer Transformation im Raum sprechen, so ist es vernünftig dies im Sinne jeder beliebigen kontinuierlichen Transformation zu deuten. Wir bezeichnen mit Ω die Gruppe der Transformationen, die überhaupt in Betracht kommen; im Falle eines Kontinuums wäre dies die Gruppe aller kontinuierlichen Transformationen. Legt man dies ausdrücklich zugrunde, so kann unsere Definition des Normalisators folgendermaßen wiederholt werden: Gegeben sei eine Untergruppe Δ der Gruppe Ω; diejenigen Elemente von Ω, die mit Δ

vertauschbar sind, bilden den Normalisator Γ von Δ. In dieser Form gewinnt der Begriff des Normalisators einen Sinn selbst für abstrakte Gruppen Ω und Δ.

Kant spricht in *Prolegomena* § 13 über den Unterschied zwischen kongruent und ähnlich und behauptet: „Wir können daher auch den Unterschied ähnlicher und gleicher, aber doch inkongruenter Dinge (z. B. widersinnig gewundener Schnecken) durch keinen einzigen Begriff verständlich machen, sondern nur durch das Verhältnis zur rechten und linken Hand, welches unmittelbar auf Anschauung geht." Nach seiner Ansicht bietet nur der transzendentale Idealismus eine Lösung für dieses Rätsel an. Ohne Zweifel gründet sich die Bedeutung der Kongruenz auf die Raumanschauung, aber ebenso ist es mit der Ähnlichkeit. *Kant* scheint auf einen wunderen Punkt zu zielen, aber gerade dieser Punkt kann durch eine Analyse an Hand einer Gruppe Γ und ihrer invarianten Untergruppen Δ, oder einer Gruppe Δ und ihres Normalisators Γ vollständig geklärt werden. Stets wenn Δ eine echte invariante Untergruppe von Γ ist, fallen die Begriffe der Kongruenz $=$ Δ-Äquivalenz und der Ähnlichkeit $=$ Γ-Äquivalenz nicht zusammen, obgleich die erstere von objektiver Bedeutung ($=$ Γ-invariant) ist. Das Phänomen, über das sich *Kant* wundert, kann somit höchst befriedigend unter allgemeine und abstrakte „Begriffe" gestellt werden.

Wer die Kongruenz in den Rang der einzigen Grundrelation der Geometrie erhebt, muß sodann die Geometrie aus diesem einen Begriff heraus entwickeln. Hierfür stehen mehrere Wege offen. Eine tiefere Einsicht, als die elementare Auffassung zuläßt, in den Stil der euklidischen Axiome würde gewonnen, wenn es gelänge, die fundamentalen Tatsachen der Geometrie als einfache Axiome über die Gruppe Δ^+ der euklidischen Bewegungen zu formulieren. Nach Überweg hat als erster Helmholtz mit überraschendem Erfolg dieses Programm in seiner Schrift „Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen" durchgeführt. Später hat S. Lie, der eine allgemeine Theorie der Transformationsgruppen aufstellte, das Problem mit seinen schärferen mathematischen Mitteln wieder aufgegriffen und es von drei auf n Dimensionen verallgemeinert. Die euklidische Bewegungsgruppe Δ^+ ist beinahe vollständig dadurch gekennzeichnet, daß sie dem starren Körper dasjenige Maß an freier Beweglichkeit verleiht, das uns aus der Erfahrung vertraut ist. In genauerer Fassung: Man ist durch eine kongruente

Abbildung imstande, einen beliebigen Punkt in einen beliebigen Punkt überzuführen, außerdem bei festgehaltenem Punkt eine beliebige Linienrichtung in diesem Punkte in eine beliebige Linienrichtung daselbst, bei festgehaltenem Punkt und Linienrichtung eine beliebige durch sie hindurchgehende Flächenrichtung in eine beliebige andere ebensolche Flächenrichtung, und so fort bis hinauf zu den (n — 1)-dimensionalen Richtungselementen. Ist aber andererseits ein Punkt, eine hindurchgehende Linienrichtung, eine durch sie hindurchgehende Flächenrichtung usw. bis hinauf zu einem (n — 1)-dimensionalen Richtungselement gegeben, so existiert außer der Identität keine kongruente Abbildung, welche dieses System inzidenter Elemente festläßt. Wir sagten soeben, dieses Axiom kennzeichne *beinahe* vollständig die euklidische Bewegungsgruppe. Tatsächlich erhält man so die Gruppe der kongruenten Transformationen eines geringfügig allgemeineren Raumes, nämlich eines projektiven Raumes mit aufgeprägter Cayleyscher Maßbestimmung. Diese Gruppe enthält einen dem Werte nach unbestimmt bleibenden Zahlparameter λ, die konstante Raumkrümmung, von welcher nur das Vorzeichen wesentlich ist. Je nachdem λ positiv, 0 oder negativ ist, kommt man auf den elliptischen, parabolischen (euklidischen) oder hyperbolischen Typus. Dies sind also die einzigen homogenen Räume, in denen alle Punkte gleichwertig sind, ferner alle Richtungen in einem Punkte usw.

Es ist schwer, über diese Probleme ohne exakte Beschreibung der euklidischen Gruppen Γ und Δ^+ vor Augen gescheit zu reden. Ein kartesisches Bezugssystem im dreidimensionalen euklidischen Raum besteht aus einem Punkt 0, dem Ursprung, und drei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ gleicher Länge. Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes werden durch

$$\overrightarrow{OP} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + x_3\mathfrak{e}_3$$

definiert. Relativ zu einem solchen System wird eine Ähnlichkeit, die den Punkt (x_1, x_2, x_3) in den Punkt (x_1', x_2', x_3') abbildet, durch eine lineare Transformation

$$S\colon\ x_i' = a_i + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (*)$$

mit konstanten Koeffizienten a_i, a_{ik} dargestellt, die der folgenden Bedingung genügen: $(x_1' - a_1')^2 + \ldots + (x_n' - a_n')^2$ ist ein konstantes positives Vielfaches a von $x_1^2 + \ldots + x_n^2$. (Die Dimensionszahl n ist hier unbestimmt gelassen.) Die Ähnlichkeit ist „nicht-vergrößernd" und heißt orthogonale Transformation für $a = 1$. Die orthogonalen Transformationen bilden eine invariante Untergruppe Δ von Γ. Aus der oben erwähnten Bedingung, die durch jede Ähnlichkeit erfüllt wird, folgt die Gleichung $d^2 = a^n$ für die Determinante d aus den a_{ik}. Folglich hat eine orthogonale Transformation entweder das Vorzeichen + ($d = +1$) oder das Vorzeichen — ($d = -1$). Die orthogonalen Transformationen mit dem Vorzeichen + bilden die Gruppe Δ^+ der euklidischen Bewegungen. Δ^+ ist eine Untergruppe von Δ mit dem Index 2, d. h., wenn S_1, S_2 zwei beliebige Transformationen von Δ mit negativem Vorzeichen sind, dann hat $S_1^{-1} S_2$ positives Vorzeichen. (Die fundamentale Tatsache der Unterscheidung von links und rechts: zwei gegenüber einer gegebenen Schraube gegensinnig gewundene Schrauben winden sich im gleichen Sinne.) Es macht nicht viel aus, ob wir Δ^+ oder Δ als Gruppe der kongruenten Abbildungen zugrundelegen. Angenommen wir entscheiden uns für die größere Gruppe Δ. Dann würde die stetige Bewegung eines starren Körpers durch eine Orthogonaltransformation $S(t)$ dargestellt, die vom Zeitparameter t abhängt und die Identität I im Anfangsmoment $t = 0$ aufweist. Da die Determinante von $S(t)$ lediglich die beiden Werte $+1$ und -1 annehmen kann, da sie ferner am Anfang $t = 0$ gleich $+1$ ist und stetig mit t variiert, muß sie stets $+1$ bleiben. So fallen selbst dann, wenn wir beliebige orthogonale Transformationen zulassen, durch die Forderung der Stetigkeit für $S(t)$ die Transformationen mit negativem Vorzeichen automatisch heraus. Ein starrer Körper könnte nur durch einen unstetigen Sprung in sein Spiegelbild übergehen.

Ein viel tiefer greifender Aspekt für die Gruppe Δ als der, die Beweglichkeit starrer Körper zu beschreiben, wird durch ihre Rolle als Gruppe der *Automorphismen der physikalischen Welt* offenbar. In der Physik können wir nicht nur die Punkte betrachten, sondern ebenso die verschiedenen Arten physikalischer Größen wie Geschwindigkeit, Kraft, elektromagnetische Feldstärke usw. Aber Tatsache ist, daß in einem kartesischen System nicht nur Punkte, sondern alle physikalischen Größen durch Zahlen dargestellt werden können, zum Beispiel eine Kraft durch ihre Komponenten f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), eine elektromagnetische Feldstärke durch eine Menge schiefsymmetrischer Komponenten $F_{ik} = - F_{ki}$ usw. Und unter dem Einfluß einer beliebigen orthogonalen Abbildung S (*) der Raumpunkte durchlaufen sie eine verwandte Transformation, die eindeutig durch S bestimmt ist. So transformieren sich zum Beispiel die Kraftkomponenten nach der Gleichung

$$f'_i = \sum_{\lambda} a_{i\lambda} f_\lambda \qquad (i, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

die Komponenten der elektromagnetischen Feldstärke nach der Regel

$$F'_{ik} = \sum_{\lambda, \mu} a_{i\lambda} a_{k\mu} F_{\lambda\mu} \qquad (i, k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

usw. Alle Naturgesetze sind gegenüber der so durch die Gruppe Δ induzierten Transformation invariant. Indessen gilt nicht, daß sie gegenüber allen Ähnlichkeiten invariant sind, obgleich es auf einem gewissen Stand der Naturerscheinungen so aussieht. Aber die Tatsachen des Atomismus lehren uns, daß die *Länge nicht relativ, sondern absolut ist.* Die Atomkonstanten der Ladung und Masse des Elektrons und das Plancksche Wirkungsquantum h legen ein absolutes Längennormal fest, das sich durch die Wellenlängen der Spektrallinien auch für praktische Messungen als zugänglich erweist. So sind wir nicht mehr von der Erhaltung des Platin-Iridium-Urmeterstabes abhängig, der beim Comité International des Poids et Mesures in Paris aufbewahrt wird. Für die Basisvektoren eines kartesischen Bezugssystems schreiben wir nun die absolute Länge 1 vor. In Δ müssen auch die Transformationen mit negativem Vorzeichen enthalten sein; denn in den Naturgesetzen gibt es keinen Hinweis für einen natürlichen Unterschied zwischen links und rechts. Nun ist klar, warum ein Körper, dessen Stellen alle eine Transformation $S(t)$ der Gruppe Δ durchlaufen, die stetig vom Zeitparameter t abhängt, und deren physikalische Merkmale sich entsprechend ändern, mit vollem Recht von sich behaupten kann: Physikalisch bin ich während meiner Bewegung gleich geblieben.

Das extensive Medium, der Außenwelt besteht sowohl aus der Zeit als auch aus dem Raum. Wie die Zeit als vierte Koordinate in das obige Schema paßt, wird in § 16 auseinandergesetzt. Dieser Schritt wurde dadurch vorbereitet, daß wir die Dimensionszahl n unbestimmt gelassen haben. Für die Physik ist der Fall $n = 4$ sogar wichtiger als $n = 3$. Hier werden wir uns freilich auf den Raum beschränken.

Wir fassen zusammen: Die Gruppe der physikalischen Automorphismen im Raum ist die Gruppe Δ der orthogonalen Transformationen. Die Gruppe der geometrischen Automorphismen ist gemäß der eigentlichen Wortbedeutung der Normalisator Γ von Δ. Er ist größer als Δ, insofern er die Dilatationen $x'_i = ax_i$ mit beliebiger Konstanter $a > 0$ mit enthält. Diese Divergenz zwischen Δ und Γ beweist letztlich, daß die *Physik sich nie auf die Geometrie zurückführen läßt*, wie Descartes gehofft hatte.

Links und rechts. Müßte ich die fundamentalsten mathematischen Tatsachen benennen, so würde ich wahrscheinlich mit der Tatsache (F_1) beginnen, daß das Abzählen einer Menge von Elementen zur gleichen Zahl führt, in welcher Reihenfolge man auch die Elemente vornimmt, dann als zweites die Tatsache (F_2) erwähnen, daß man unter den Permutationen von n (≥ 2) Dingen die geraden und die ungeraden voneinander unterscheiden kann. Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe mit Index 2 innerhalb der Gruppe aller Permutationen. Die erste Tatsache bildet den Grund des geometrischen Dimensionsbegriffes, die zweite den des „Sinnes". Wir betrachten die affine Vektorgeometrie. Eine Basis für ihre Vektoren besteht aus n Vektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$, so daß jeder beliebige Vektor sich als Linearkombination $x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n\mathfrak{e}_n$ eindeutig ausdrücken läßt, und der Satz von der Invarianz der Dimensionszahl besagt, daß jede Basis notwendig aus der gleichen Anzahl n Vektoren besteht. Aus dieser Aussage folgt klar die Tatsache (F_1); denn durch jede Umgruppierung der Basisvektoren geht man zu einer neuen Basis über. Umgekehrt bildet das Invarianztheorem einen leicht aus der Tatsache (F_1) zusammen mit der Regel für die Addition und Multiplikation von Zahlen abgeleiteten algebraischen Satz. Jede Anordnung von n gegebenen, linear unabhängigen Vektoren legt einen „Sinn" fest, und zwei Anordnungen legen dann den gleichen Sinn fest, wenn sie durch eine gerade Permutation auseinander hervorgehen (Definition durch Abstraktion). Eine ungerade Permutation ändert den Sinn ins Gegenteil. Das ist ganz klar die kombinatorische Wurzel der Unterscheidung zwischen links und rechts. Außerdem wird man in Verbindung mit den Grundoperationen der affinen Vektorgeometrie (Vektoraddition, Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl) zu einem Vergleich des „Sinnes" zweier Basen $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ und $\mathfrak{e}_1^*, \ldots, \mathfrak{e}_n^*$

geführt. Wenn man die Vektoren $\mathfrak{e}^*$ durch die Vektoren $\mathfrak{e}$ ausdrückt, also

$$\mathfrak{e}_i^* = a_{1i}\mathfrak{e}_1 + \ldots + a_{ni}\mathfrak{e}_n,$$

dann besitzen die Koeffizienten a_{ik} eine nicht-verschwindende Determinante. Die Sinne der beiden Basen sind entweder gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die Determinante positiv oder negativ ist. Die Definition einer Determinante gründet sich aber auf die Unterscheidung gerader und ungerader Permutationen!

Kant findet den Schlüssel zum Rätsel des links und rechts[1]) im transzendentalen Idealismus. Der Mathematiker sieht dahinter die kombinatorische Tatsache der Unterscheidung von geraden und ungeraden Permutationen. Die Diskrepanz zwischen der Fragestellung des Philosophen und des Mathematikers nach den Wurzeln des Phänomens, das uns die Natur stellt, kann kaum auffallender beleuchtet werden.

15. Der Riemannsche Standpunkt. Topologie

Die Begriffe Dimensionszahl und Sinn sind nicht auf den metrischen euklidischen oder affinen Raum beschränkt. Sie gelten für kontinuierliche Mannigfaltigkeiten im allgemeinen. Riemann hat als erster den allgemeinen Begriff einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mathematisch analysiert. Eine genügend kleine Umgebung eines beliebigen Punktes in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit kann eineindeutig und stetig auf ein Gebiet des n-dimensionalen Zahlenraumes abgebildet werden, wobei die Punkte des letzteren n-Tupel von reellen Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sind. Jede umkehrbar eindeutige Transformation der Koordinaten

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m);$$
$$x_k = \psi_k(y_1, \ldots, y_m) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

liefert eine neue Koordinatenzuordnung, die zur Darstellung der gleichen Umgebung dient. Ist m notwendig gleich n? Dies ist die Frage der topologischen Invarianz der Dimensionszahl.

---

[1]) Vgl. S. 108.

Es sei $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ein gegebener Punkt und $P^* = (x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$ irgend ein unendlich nahe bei P liegender Punkt. Sind die Transformationsfunktionen differenzierbar, dann transformieren sich die Komponenten $(dx_1, \ldots, dx_n)$ aller von P ausgehenden infinitesimalen Vektoren $\overrightarrow{PP^*}$ nach linearen Formeln

$$dy_i = \sum_k a_{ik} \cdot dx_k, \quad dx_k = \sum_i b_{ki} \cdot dy_i, \tag{*}$$

deren Koeffizienten a_{ik}, b_{ki} vom Punkt P, aber nicht von P^* abhängen. (Infinitesimale Größen lassen sich dadurch vermeiden, daß man eine imaginäre Zeit τ einführt und einen Punkt sich in der Mannigfaltigkeit nach einem willkürlichen Gesetz $x_k = x_k(\tau)$ bewegen läßt. Angenommen der Punkt gehe im Zeitpunkt $\tau = 0$ durch P; seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist ein Vektor in P mit den x-Komponenten $u_k = (dx_k/d\tau)_{\tau=\sigma}$. Die y-Komponenten v_i der gleichen Geschwindigkeit sind mit den x-Komponenten durch die Gleichungen (*) verknüpft,

$$v_i = \sum_k a_{ik} u_k, \quad u_k = \sum_i b_{ki} v_i,$$

die für alle möglichen Geschwindigkeiten in P gilt.) Aber diese linearen Transformationen können nur dann invers zueinander sein, wenn $m = n$ und die Determinante der a_{ik}, die sogenannte Jacobische Determinante, von Null verschieden ist. Für die Gesamtheit Ω sind nun nur solche „differenzierbaren“ Transformationen der Koordinaten zugelassen. Unter diesen Umständen spricht man von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Da sich die Jacobische Determinante stetig mit P ändert, ist sie in dem ganzen, von den beiden Koordinatenzuordnungen bedeckten Gebiet entweder durchweg positiv oder durchweg negativ. Im ersten Fall erteilen wir der Transformation die Signatur $+$, im zweiten Fall $-$. Danach kann über dem ganzen Gebiet ein „Sinn“ festgelegt werden. Man sieht, daß sowohl die Dimensionszahl als auch der Sinn aus der Tatsache folgen, daß die affine Geometrie im Unendlichkleinen gilt. Während es der Topologie recht gut gelungen ist, mit der Stetigkeit Herr zu werden, verstehen wir noch nicht die innere Bedeutung der Beschränkung auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Vielleicht vermag sie die Physik eines Tages abzutun. Gegenwärtig scheint sie unerläßlich, weil die Transformationsgesetze der meisten physikalischen Größen eng mit denen der Differentiale dx_i (*) verknüpft sind.

Riemann hat, gestützt auf die Gaußsche Theorie der krummen Flächen, angenommen, die euklidische Geometrie gelte im Unendlichkleinen. Das Quadrat der Länge ds des infinitesimalen Vektors $\overrightarrow{PP^*}$ mit den Komponenten dx_i kann dann durch eine positive quadratische Form

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \tag{**}$$

der dx_i ausgedrückt werden. Ihre Koeffizienten g_{ik} sind vom Vektor $\overrightarrow{PP^*}$ mit den Komponenten dx_i unabhängig, sie werden aber im allgemeinen vom Punkt P mit den Koordinaten x_i abhängen und stetige Funktionen dieser Koordinaten sein. Aus der invarianten Bedeutung von ds^2 erhellt, wie sich die Komponenten g_{ik} des „Maßfeldes" beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem y_i transformieren. Die Metrik eines dreidimensionalen Riemannschen Raumes dieser Art prägt sich jeder in ihm liegenden Fläche auf, die dadurch zum zweidimensionalen Riemannschen Raum gestempelt wird. Hingegen gilt im dreidimensionalen euklidischen Raum nicht auf jeder Fläche die zweidimensionale euklidische Geometrie; denn hier treten alle möglichen zweidimensionalen Riemannschen Räume als Unterräume des dreidimensionalen euklidischen Raumes auf. Der Raum ist also in der euklidischen Geometrie von viel speziellerer Natur (nämlich nicht-gekrümmt) als die möglichen Flächen darin, während der Riemannsche Raumbegriff genau den richtigen Grad der Allgemeinheit hat, um diese Diskrepanz zum Verschwinden zu bringen.

Wie nach Leibniz' Kontinuitätsprinzip die wahre Gesetzmäßigkeit der Natur ihren Ausdruck in Nahewirkungsgesetzen findet, wobei nur die Werte physikalischer Größen in Raum-Zeit-Punkten mit unmittelbarer Nachbarschaft zueinander verknüpft werden, so sollten die Grundrelationen der Geometrie sich nur auf unendlich nah benachbarte Punkte („Nahgeometrie" im Gegensatz zur „Ferngeometrie") beziehen. *Nur im Unendlichkleinen dürfen wir erwarten auf die elementaren, überall gleichen Gesetze zu stoßen*, darum muß die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen verstanden werden.

Verlangt man freilich die metrische *Homogenität* des Raumes — und der Raum als Form der Erscheinungen ist notwendig homogen —, so fällt man von dem Riemannschen sofort auf den klassischen Raumbegriff zurück, zu dem die Helmholtzschen Postulate über die Bewegungsgruppe führen. Aber *Riemann nahm an, daß das metrische Feld nicht ein für allemal starr gegeben ist, sondern in kausaler Abhängigkeit von der Materie steht* und mit ihr sich verändert; es gehört für ihn nicht zur ruhenden homogenen Form der Erscheinungen, sondern zum wechselvollen materiellen Geschehen. *Riemann* fragt nach dem innern Grunde der Maßverhältnisse des Raumes, und nachdem er mit den auf S. 62 zitierten Worten den Fall der diskreten und der stetigen Mannigfaltigkeit unterschieden hat, fährt er fort: „Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden." Das Maßfeld tut sich kund vermöge seiner physischen Wirkungen, die es auf starre Körper, Lichtstrahlen und alle Naturvorgänge ausübt, aus denen allein wir seinen Zustand ablesen können. Was aber *wirkt*, muß auch *leiden*, muß selber etwas Reales sein und kann nicht in „geometrischer" Starre unangreifbar über den Kräften der Materie thronen. Dadurch ist nun trotz der Inhomogenität des metrischen Feldes die freie Beweglichkeit der Körper ohne Maßänderungen zurückgewonnen, da ein Körper das von ihm erzeugte oder deformierte metrische Feld bei der Bewegung „mitnehmen" wird. *Einstein* hat, nachdem er den Raum durch die Zeit zum vollen extensiven Medium der Außenwelt erweitert hatte, den Riemannschen Gedanken zu einer in alle Einzelheiten durchgebildeten physikalischen *Theorie der Gravitation* ausgestaltet und insbesondere auch die Gesetze ermittelt, nach denen die Materie auf das Maßfeld einwirkt.

Riemann und Einstein behaupten, daß die Gruppe der — geometrischen und physikalischen — Automorphismen mit der Gesamtheit Ω aller differenzierbaren Transformationen zusammenfällt. In dieser Beziehung unterscheiden sich ihre Theorien radikal von dem im letzten Abschnitt auseinandergesetzten Standpunkt. Ihr Prinzip der allgemeinen Relativität ist nur annehmbar, nachdem man das Maßfeld unter die physikalischen Größen eingegliedert hat, die auf die Materie einwirken und von dieser Gegenwirkung erfahren. Trotzdem wird die euklidische Geometrie für die infinitesimale Nachbarschaft eines beliebig gegebenen Punktes P_0 beibehalten. Denn es ist eine mathematische Tatsache, daß für alle Linienelemente in einem gegebenen Punkt P_0 die Maßgleichung (**) die spezielle Form

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

annimmt, falls entsprechende Koordinaten x_i für die Nachbarschaft von P_0 gewählt sind. In dieser Form ist für irgendeine Unbestimmtheit kein Platz, und daher können wir sagen, die *Natur* der Metrik sei in jedem Punkt *gleich*. Aber das Koordinatensystem, in welchem das Maßgesetz diese feste Normalform annimmt und das, wie ich mich ausdrücken will, charakteristisch ist für die „*Orientierung*" der Metrik, ist im allgemeinen von Stelle zu Stelle ein anderes. Eines analogen Sprachgebrauchs bedienen wir uns in der euklidischen Geometrie, wenn wir sagen: Alle Würfel (gegebener Größe) sind von der gleichen *Natur*, sie unterscheiden sich jedoch durch ihre „Orientierung". Die Natur der Metrik ist *eine*, absolut gegeben; nur die gegenseitige Orientierung in den verschiedenen Punkten ist kontinuierlicher Veränderungen fähig und abhängig von der Materie. Der euklidische Raum ist zu vergleichen einem Kristall, der aus lauter gleichen unveränderlichen Atomen in der regelmäßigen und starren, unveränderlichen Anordnung eines Gitters aufgebaut ist, der Riemannsche Raum einer Flüssigkeit, die aus denselben untereinander gleichen unveränderlichen Atomen besteht, aber in einer beweglichen, gegenüber einwirkenden Kräften nachgiebigen Lagerung und Orientierung.

Dies kommt vielleicht durch eine andere Formulierung der Riemannschen Konzeption heraus, die für die Quantenphysik unentbehrlich geworden ist, wenn die ein bewegtes Elektron kennzeichnenden Größen in die allgemeine Relativitätstheorie eingepaßt werden sollen. Aus der obigen Erläuterung durch Geschwindigkeiten ist klar, was mit dem Körper der Tangentenvektoren

(Geschwindigkeiten) in P gemeint ist. Sie bilden einen n-dimensionalen Vektorraum. Die Koordinatenzuordnung $P \to x_i$ bestimmt eine Vektorbasis $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ in diesem Tangentenvektorraum $V\,(P)$ in P, so daß $u_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + u_n\mathfrak{e}_n$ der Vektor mit den x-Komponenten u_i ist. Angenommen der Vektorraum in P besitze eine euklidische Metrik (mit absolutem Längennormal), so können wir darin ein örtliches kartesisches Bezugssystem $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\,(P)$ einführen, das aus n aufeinander senkrecht stehenden Vektoren der Länge 1 besteht. Die Willkürlichkeit in der Wahl dieses Systems drückt sich durch die Gruppe Δ_0 der euklidischen Drehungen aus. Diese Gruppe besteht aus allen linearen Transformationen

$$S\colon \quad z'_\beta = \sum_\gamma a_{\beta\gamma} z_\gamma \qquad (\beta, \gamma = 1, \ldots, n),$$

für welche

$$z_1'^2 + \ldots + z_n'^2 = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

ist. Hierin sind die Variablen z_β die Komponenten eines beliebigen Vektors von $V(P)$ in bezug auf das kartesische System $\mathfrak{f}$. Die Zahlenwerte $e_{i\beta}$ ($\beta = 1, \ldots, n$) der Komponenten jedes einzelnen der Vektoren $\mathfrak{e}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) in bezug auf $\mathfrak{f}$ beschreiben das Einbetten des Systems $\mathfrak{f}$ in den Raum. So können nun die n^2 Größen $e_{i\beta}$, die ebenso von der Wahl der Koordinaten x_i wie vom kartesischen System $\mathfrak{f}\,(P)$ in P abhängen und Funktionen von P sind, dazu dienen das Maßfeld zu kennzeichnen. Für die Riemannschen g_{ik} errechnet man leicht die Werte

$$g_{ik} = e_{i1}e_{k1} + \ldots + e_{in}e_{kn}.$$

Erst wenn die Koordinaten x_i und ein kartesisches System $\mathfrak{f}\,(P)$ in jedem Punkt P gewählt sind, können alle physikalischen Größen durch Zahlen dargestellt werden. Die Naturgesetze sind invariant 1. gegenüber willkürlichen Transformationen der Koordinaten x_i und 2. gegenüber einer Drehung S des Systems $\mathfrak{f}\,(P)$, die willkürlich (stetig) vom Punkt P abhängen kann. Es besteht also diese doppelte Invarianz, eine, die von der Gruppe Ω aller Transformationen der Koordinaten x_i beschrieben wird, und die andere durch ein Element der Gruppe Δ_0, das sich willkürlich mit der Lage von P ändern kann.

Was beim Übergang von der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie geschehen ist, ist offensichtlich folgendes: Die physikalischen Automorphismen, die, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, die Gruppe Δ bilden, sind in ihre Bestandteile, die Translationen und Rotationen zerlegt worden. Die Translationsgruppe ist durch die Gruppe aller möglichen Transformationen der Koordinaten ersetzt worden, während die Rotationen zwar euklidische Rotationen geblieben sind, nun aber mit einem Zentrum P verknüpft und imstande sind frei zu variieren, während sich das Zentrum P über die Mannigfaltigkeit bewegt. Der Raum, das extensive Medium der materiellen Welt, ist ganz klar der Sitz der Gruppe Ω der Koordinatentransformationen; doch scheint die Gruppe Δ_0 ihren Ursprung in den letzten Elementarteilchen der Materie zu haben. Die Größen $e_{i\beta}$ sind somit die Mittler zwischen Materie und Raum.

Es erhebt sich die Frage, aus welchen inneren Gründen heraus die Natur gerade Δ_0 unter allen möglichen Gruppen homogener linearer Transformationen ausgesucht hat. Eine Antwort liefert die Helmholtzsche Theorie, nach der Δ_0 vollständig durch das Axiom der freien Beweglichkeit gekennzeichnet ist: Jede inzidente Menge σ von 1-, 2-, ..., $(n - 1)$-dimensionalen Richtungen kann in jede ebensolche andere Menge durch eine Transformation von Δ_0 überführt werden, während diejenigen Transformationen von Δ_0, die eine gegebene Menge σ inzidenter Richtungen fest lassen, eine Untergruppe bilden, die nur zwei Elemente enthält (nämlich die Identität und die Spiegelung in σ). Diese Kennzeichnung ist jedoch weniger überzeugend, nachdem nun die Gruppe nicht mehr zur Beschreibung der Beweglichkeit eines starren Körpers dient. (Außerdem versagt sie für die Lorentzgruppe, die in der vierdimensionalen Welt die Stelle der orthogonalen Gruppe im dreidimensionalen Raum einnimmt.)

Die Gruppe Δ_0 könnte als abstrakte Gruppe betrachtet werden, für welche verschiedene Darstellungen durch lineare Transformationen für verschiedene physikalische Größen kennzeichnend sind, so zum Beispiel die Darstellung Δ_0 durch orthogonale Transformationen selbst für die Vektoren, eine gewisse „Tensor"-Darstellung für die elektromagnetische Feldstärke, dann eine sehr bemerkenswerte, nämlich die sogenannte Spinordarstellung für das elektromagnetische Wellenfeld.

Topologie. Im allgemeinen überdeckt eine Koordinatenzuordnung nur einen Teil einer gegebenen kontinuierlichen Mannigfaltigkeit. Die „Koordinate" $(x_1, \ldots, x_n)$ ist ein aus reellen Zahlen bestehendes Symbol. Man kann sich das Kontinuum der reellen Zahlen als durch iterierte Zweiteilung geschaffen denken. Um die Natur einer Mannigfaltigkeit im ganzen bewältigen zu können, mußte die Topologie kombinatorische Schemata allgemeinerer Natur entwickeln. Durch diese kombinatorische Beschreibung ist sie dann die Beschränkung auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten losgeworden.

Um ein Kontinuum der mathematischen Behandlung zu unterwerfen, muß man annehmen, daß es in „Elementarstücke" geteilt sei und diese Teilung durch immer wiederholte Unterteilung nach einem festen Schema — im eindimensionalen Fall besteht dieses Schema in der Zweiteilung jeder Elementarstrecke — beständig verfeinert und dadurch das Kontinuum mit einem immer dichter werdenden Teilungsnetz übersponnen werde. So hat denn eigentlich jedes Kontinuum sein eigenes arithmetisches Schema, das durch die kombinatorische Beschreibung der Art, wie in der anfänglichen Teilung die einzelnen Elementarstücke aneinander grenzen, durch das „topologische Gerüst" der Mannigfaltigkeit, schon vollständig festgelegt ist; die Einführung von Zahlkoordinaten durch die Beziehung auf das besondere Teilungsschema des offenen eindimensionalen Kontinuums ist eine Vergewaltigung, die sich nur durch die besonders bequeme kalkulatorische Behandlung des gewöhnlichen Zahlkontinuums mit seinen vier Spezies praktisch rechtfertigt. Das topologische Gerüst bestimmt die „Zusammenhangsverhältnisse" der Mannigfaltigkeit im großen. Es ist eine wichtige, aber schwierige mathematische Frage, wann zwei solche Gerüste äquivalent, d. h. fähig sind, dasselbe Kontinuum, auf zwei verschiedene Arten in Elementarstücke zerlegt, darzustellen. Das Gerüst besteht im Falle einer n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit aus endlich vielen Elementen 0., 1., 2., …, $n$ter Stufe (Ecken, Kanten, …), die durch irgendwelche Symbole gekennzeichnet werden müssen. Ein Element ν-ter Stufe wird begrenzt von gewissen Elementen $(\nu - 1)$ter Stufe; durch die Angaben darüber ist das Gerüst vollständig beschrieben. Mit den Forderungen, die an ein solches Gerüst zu stellen sind, mit den Eigenschaften, die es besitzt, und mit der Frage der Äquivalenz befaßt sich die *Analysis situs* oder die kombinatorische Topologie.

Die Topologie hat das Eigentümliche an sich, daß die zu ihr gehörigen Fragen unter Umständen sicher entscheidbar sind selbst dann, wenn die Kontinua, an welche sie gestellt werden, nicht exakt, sondern nur vage gegeben sind, wie es in der Wirklichkeit stets der Fall ist. So ist an einem unverletzten Ziegelstein sein topologisches Gerüst mit Sicherheit abzulesen; ein in sich zurücklaufender Faden, der eine Kurve im Sinne der exakten Geometrie nur näherungsweise festlegt, ist doch mit Sicherheit entweder *verknotet* oder nicht. Wo die möglichen Fälle eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, findet keine Ungenauigkeit statt. So kann man in der rationalen Bearbeitung eines Kontinuums drei Stufen unterscheiden: die *Morphologie*, die mit vag umschriebenen gestaltlichen Typen operiert; die *Topologie*, die durch auffällige Singularitäten geleitet oder in freier Konstruktion ein Gerüst, vag lokalisiert, aber kombinatorisch genau bestimmt, in die Mannigfaltigkeit hineinsieht; und die eigentliche mit Idealgebilden operierende *Geometrie*, die in ein wirkliches Kontinuum erst dann exakt sich hineintragen ließe, wenn dies mit einem sich ins Unendliche verfeinernden und verschärfenden Teilungsnetz übersponnen wäre; die geometrischen vom Teilungsnetz unabhängigen Eigenschaften der im Kontinuum konstruierbaren Gebilde mögen sich dabei auf ein in ihm ausgebreitetes Strukturfeld nach Art des metrischen Feldes stützen. Welche Bedeutung trotz evidenter Unerfüllbarkeit der eben für ihre Anwendung aufgestellten Forderung die idealisierende Geometrie in der Wirklichkeit besitzt, werden wir im naturwissenschaftlichen Teil erörtern. In dem geschilderten Aufstieg enthüllt sich das *sinnlich-kategoriale Doppelantlitz der Geometrie*, um dessentwillen schon *Plato* den geometrischen Figuren eine Mittelstellung zwischen den Ideen und den Sinnendingen anwies. — Für eine sorgfältigere phänomenologische Analyse des Gegensatzes von Vagem und Exaktem und des Limesbegriffs verweise ich auf die am Schluß von § 9 zitierte Schrift von *O. Becker*. — Wenn wir die Unterteilung des topologischen Gerüstes nach einem festen Schema vornehmen, so bedeutet das für ein konkret vorliegendes Kontinuum, daß wir annehmen, wir hätten uns bei der ersten Teilung in Stücke über die Analysis-situs-Beschaffenheit dieser Elementarstücke nicht getäuscht. Wir schließen also die Möglichkeit aus, daß sich beim genaueren Untersuchen einer Fläche zeigen könnte, daß das, was wir für ein Elementarstück gehalten haben, in Wahrheit etwa aufgesetzte kleine Henkel trägt, die dem Stück andere Zusammenhangsverhältnisse verleihen, und so in infinitum bei Anwendung immer stärkerer „Vergrößerungen" immer neue topologische Verwicklungen sich enthüllen würden.

Der Riemannsche Standpunkt läßt auch für den wirklichen Raum ganz andere topologische Zusammenhangsverhältnisse zu, als sie der euklidische besitzt. Nur auf Grund der allgemeineren und freieren Auffassung der Geometrie, welche die Mathematik des letzten Jahrhunderts entwickelt hat, nur mit offenem Blick für die von ihr aufgedeckten Denkbarkeiten kann heute, glaube ich, das Raumproblem philosophisch fruchtbar in Angriff genommen werden.

Literatur

P. Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie. Berlin 1932.

P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie. Berlin 1935.

H. v. Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen (1868). Wiss. Abhandl. II, S. 618.

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (1854). Ges. math. Werke 1876; gesond. Ausg. m. Anmerk. von *H.* Weyl, Berlin 1923.

O. Veblen, Analysis situs. A. Math. Soc. Colloquium Publications, 2. Aufl. New York 1931.

H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923.

ZWEITER TEIL: NATURWISSENSCHAFT

Ὁ ἄναξ, οὗ τὸ μαντεῖόν ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς,
οὔτε λέγει οὔτε κρύπτει
ἀλλὰ σημαίνει.

(Der Herr, dessen das Orakel zu Delphi ist,
offenbart nicht und verbirgt nicht,
sondern kündet in Zeichen.)

Heraklit

I. Raum und Zeit. Die transzendente Außenwelt

16. Struktur von Raum und Zeit in ihrer physischen Wirksamkeit

Die möglichen Raum-Zeit-Stellen oder „*Weltpunkte*" bilden ein vierdimensionales Kontinuum. Nur das *raumzeitliche Zusammenfallen* und die unmittelbare raumzeitliche Nachbarschaft haben einen in der Anschauung ohne weiteres klar aufzuweisenden Sinn. Es heißt bereits, dem vierdimensionalen extensiven Medium

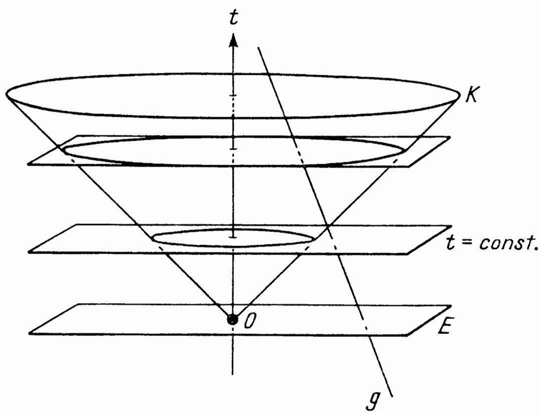


Fig. 1. Schichtung und Faserung der Welt in graphischer Darstellung. Weltlinie g einer gleichförmigen Translationsbewegung. Lichtkegel $\mathfrak{K}$.

der Außenwelt eine bestimmte *Struktur* zuschreiben, wenn man an eine Zerspaltung der Welt in einen *absoluten Raum* und eine *absolute Zeit* in dem Sinne glaubt, daß es eine objektive Bedeutung habe, von zwei getrennten, raumzeitlich eng begrenzten Ereignissen zu sagen, sie geschähen am gleichen *Ort* (zu verschiedenen Zeiten) oder zur gleichen *Zeit* (an verschiedenen Orten). Alle gleichzeitigen Weltpunkte bilden eine dreidimensionale *Schicht*, alle gleichortigen Weltpunkte eine eindimensionale *Faser*. Die Struktur der Welt gemäß dieser Ansicht läßt sich also dahin beschreiben, daß sie eine Faserung und eine quer zu den Fasern verlaufende Schichtung besitzt (durch jeden Weltpunkt läuft eine Faser und eine Schicht; je eine Faser und eine Schicht schneiden sich in einem einzigen Weltpunkt). Streichen wir um der graphischen Darstellung willen eine Raumdimension, befassen uns also nur mit den Vorgängen auf einer Fläche, speziell einer Ebene, repräsentieren diese durch eine horizontale Ebene E und tragen senkrecht zu ihr die Zeit t auf, so können wir in unserm Anschauungsraum ein Abbild der Welt entwerfen, in welchem die Schichten gleichzeitiger Weltpunkte als lauter horizontale Ebenen erscheinen, die Fasern gleichortiger Weltpunkte aber durch die vertikalen Geraden dargestellt werden.

Man schreibt ferner Zeit und Raum eine *Maßstruktur* zu, nimmt nämlich an, daß die Gleichheit von Zeitstrecken, die Kongruenz räumlicher Figuren einen objektiven Sinn habe. Durch die Aussagen der euklidischen Geometrie wird die räumliche Maßstruktur genauer beschrieben. Entsprechen in unserm graphischen Abbild gleichlangen Zeitstrecken gleichlange Stücke der vertikalen Zeitachse, so wird in ihm die Bewegung eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie dahinfliegenden Körpers, sein graphischer Fahrplan durch eine schräge Gerade dargestellt; auf dieser „*Weltlinie*" liegen alle und nur diejenigen Raumzeitstellen, in denen der Körper im Laufe seiner Geschichte gegenwärtig ist. Die Weltlinien ruhender Körper sind vertikale Gerade. Zwei Körper treffen sich, wenn ihre Weltlinien sich in einem Raumzeitpunkte schneiden.

Die Scheidung der *Struktur* von dem zugrunde liegenden *amorphen Kontinuum*, die Erkenntnis, daß der Raum an sich nur das Medium der „Berührung" ist, dokumentiert sich bereits in der Aristotelischen Auffassung vom Raume. *Lobatschefsky* sagt (Urk. z. Gesch. d. Nicht-Eukl. Geom., hg. v. *Engel* und *Stäckel*, I, S. 83): „Die Berührung bildet das unterscheidende Merkmal der Körper, und ihr verdanken sie den Namen: *geometrische* Körper, sobald wir an ihnen diese Eigenschaft festhalten, während wir alle anderen, mögen sie nun wesentlich sein oder zufällig, nicht in Betracht ziehen". Hier wird dieser Gedanke freilich nur für den Raum, nicht für Raum-Zeit ausgesprochen. — Welches nun auch der innere Grund für die Struktur des Weltmediums sein mag — alle Naturgesetze zeigen, daß sie von einschneidendster Wirkung auf den Gang der physischen Geschehnisse ist: sie gibt sich kund im Verhalten der starren Körper und der Uhren, in der geradlinig-gleichförmigen Bewegung eines keiner Einwirkung unterliegenden Massenpunktes, in der (beim Visieren benutzten) Geradlinigkeit des Lichtstrahles im leeren Raum, in der in konzentrischen Kugeln oder Kreisen sich vollziehenden Ausbreitung einer Licht-, Schall- oder Wasserwelle, usw. Es ist die Aufgabe, sie aus diesen ihren physischen Wirkungen zu erkennen; wie kann ich, muß gefragt werden, Gleichortigkeit oder Gleichzeitigkeit von Ereignissen, Gleichheit von Zeitstrecken und Kongruenz räumlicher Gebiete objektiv feststellen?

Was die erste Frage betrifft, so ist von jeher dem Dogma des absoluten Raumes die Lehre von der *Relativität der Bewegung* entgegengestellt worden. *Aristoteles* bezeichnet „Ort“ (τόπος) als Beziehung eines Körpers zu den Körpern seiner Umgebung. *Descartes* definiert (Princ. II) Bewegung als „Überführung eines Teiles der Materie oder eines Körpers aus der Nachbarschaft derjenigen Körper, welche ihn unmittelbar berühren und als ruhend betrachtet werden, in die Nachbarschaft anderer Körper“. Eindringlich bespricht *Locke* (On human understanding, 2. Buch, 13. Kap., §§ 7—10) die Relativität des Ortes. *Galilei* schildert sie hübsch an dem Beispiel des Schreibers, der an Bord eines fahrenden Schiffes seine Aufzeichnungen macht und der darum „in Wahrheit“, d. h. relativ zur Erde mit seiner Schreibefeder eine lange leicht gewellte glatte Linie von Venedig bis Alexandrette zieht (Opere, ed. Alberi, 1847ff., I, S. 190). Mit aller Gründlichkeit, auch in logisch-erkenntnistheoretischer Hinsicht, verteidigt *Leibniz* die Relativität der Raumstelle in den Streitschriften gegen *Clarke* (und *Newton*). Hier (Hauptschriften, herausgeg. v. Cassirer I, S. 182) wird sie glücklich illustriert durch das Analogon der Stellen in einem genealogischen Stammbaum.

Wichtig ist auch die Argumentation in *Leibnizens* drittem Schreiben, Art. 5 (ibid., I, S. 135): „Folglich läßt sich, unter der Voraussetzung, daß der Raum etwas an sich selbst, daß er also mehr als die bloße Ordnung der Körper untereinander ist, unmöglich ein Grund dafür angeben, weshalb Gott die Körper — die Beibehaltung ihrer Abstände und gegenseitigen Lagebeziehungen vorausgesetzt — gerade an diese bestimmte Raumstelle und nicht an eine andere gesetzt hat; warum etwa nicht alles durch einen Umtausch von Osten und Westen umgekehrt angeordnet worden ist. Ist aber der Raum nichts anderes als diese Ordnung und Beziehung selbst und ist er ohne die Körper gar nichts als die Möglichkeit, ihnen eine bestimmte Stellung zu geben, so sind eben diese beiden Zustände, der ursprüngliche und seine Umkehrung, in nichts voneinander verschieden: ihr scheinbarer Unterschied ist nur eine Folge unserer schimärischen Voraussetzung von der Realität des Raumes an sich selbst. In Wahrheit aber wäre der eine genau dasselbe wie der andere, da sie durchaus ununterscheidbar sind und somit die Frage, warum der eine Zustand vor dem anderen vorgezogen wurde, ganz unstatthaft ist"[1]). *Newton*, der Absolutist, betrachtet im Gegenteil die Bewegung als einen Beweis für die Schöpfung der Welt aus der freien Willkür Gottes; denn sonst sei es unerfindlich, warum die Materie sich gerade in dieser statt in irgendeiner anderen Richtung bewege (Vorrede zur 2. Ausgabe der Principia von *Cotes*, und Principia, S. 529). *Leibnizen* verbietet seine Theologie, Gott solche „ohne zureichenden Grund" erfolgende Entscheidungen aufzubürden.

Der Bezugskörper, auf den wir uns im täglichen Leben mit gutem Grund fast immer stützen, wenn von Ruhe und Bewegung geredet wird, ist die „feste, wohlgegründete Erde"[2]). Praktisch ist

---

[1]) Man vergleiche dazu die am Schluß von § 14 des mathematischen Teils zitierte Äußerung von *Kant* über *rechts* und *links*. Man hat *Kant* so ausgelegt: Wenn Gottes erste Schöpfertat eine linke Hand hinbildete, so besaß diese Hand schon damals, als sie mit nichts verglichen werden konnte, jene nur anschaulich, nicht begrifflich zu fassende Bestimmtheit der Linken (im Gegensatz zur Rechten). Dies ist falsch, wie *Leibniz* betont, wenn damit gesagt sein soll, daß etwas Anderes vor sich gegangen wäre, wenn Gott statt der „linken" zuerst eine „rechte" Hand erschaffen hätte. Man muß den Prozeß der Weltentstehung weiter verfolgen, ehe ein Unterschied auftreten kann: würde Gott, statt zuerst eine linke und dann eine rechte Hand zu machen, erst eine rechte und dann abermals eine rechte geformt haben, so hätte er den Weltenplan nicht im ersten, sondern im zweiten Akt geändert, durch den er statt einer zur ersterschaffenen Hand ungleichsinnigen eine zu ihr gleichsinnige hervorbrachte.

[2]) „... Auf der wohlgegründeten dauernden Erde, ..." Zitat aus Goethes Gedicht „Grenzen der Menschheit".

diese Wahl bei weitem die zweckmäßigste, sie drängt sich als selbstverständlich auf. Nur die nicht an den Sinnenschein sich bindende, frei im Raume konstruierende Phantasie konnte sich davon losmachen. So entwarf schon *Anaxagoras* den Schattenkegel der Erde im Weltraum und schloß aus den Verfinsterungen und den Phasen auf die richtige räumliche Anordnung von Erde, Sonne, Mond und Fixsternen; im „Gesicht des Mondes" erkennt er die Schattenwirkung seiner Berge. Durch dieselbe Methode gelangten die Pythagoreer zu der *Hypothese der Erdbewegung*. Und aus dem bewußten Gegensatz zu diesem pythagoreisch-platonischen Geist der apriorisch-mathematischen Konstruktion entspringt des *Aristoteles*' Rückkehr zum geozentrischen System. Zugleich aber spricht daraus, daß man der Erde, der Wohnstätte des Menschengeschlechts, ein absolutes Vorzugsrecht gegenüber allen andern Bezugskörpern einräumt, eine bestimmte religiöse Einstellung zum All. Es ist der Versuch, die idealistische Position, gemäß welcher Ich das absolute Zentrum der mir offenbaren Welt bin, in der objektiv-realen Sphäre, wo sie durch die vom Ich geforderte Anerkennung des Du ihre Grenze findet, dennoch kosmo-theo-logisch, unter Erweiterung des Ich zur Menschheit, aufrechtzuerhalten. Nur darum wurde das Buch des *Kopernikus* zur Weltanschauungswende, und in dieser Richtung zog *Bruno* begeistert und stürmisch die Konsequenzen. Die erschütternde Erlösungstat des Gottessohnes, Kreuzigung und Auferstehung, nicht mehr einmaliger Angelpunkt der Weltgeschichte, sondern ein rasch absolviertes Gastspiel in einem kleinen Nest, sich wiederholend von Stern zu Stern — in dieser Blasphemie zeigt sich vielleicht am prägnantesten das Religiös-bedenkliche einer Lehre, welche die Erde aus dem Mittelpunkt der Welt verdrängt. „In dem bei *Kepler*, *Galilei* und *Descartes* gleichmäßig auftretenden Satze, es sei töricht zu denken, daß in dem Menschen das Ziel des Universums liege", sagt *Dilthey* (Der entwicklungsgeschichtliche Pantheismus, Ges. Schriften, Bd. II, 3. Aufl. 1923, S. 353), „vollzieht sich eine *vollständige Umwandlung der Interpretation der Welt*. Indem diese Denker zu einer immanenten Teleologie hingedrängt wurden, deren Ausdruck die Harmonie und Schönheit des Universums ist, ändert sich der *Charakter der bisherigen christlichen Religiosität*". Und *Goethe* in der Geschichte der Farbenlehre (3. Abteilung, 2. Zwischenbetrachtung): „Vielleicht ist noch nie eine größere Forderung an die Menschheit geschehen: denn was ging nicht alles durch diese Anerkennung in Rauch auf: ein zweites Paradies, eine Welt der Unschuld, Dichtkunst und Frömmigkeit, das Zeugnis der Sinne, die Überzeugung eines poetisch-religiösen Glaubens; kein Wunder, daß man dies alles nicht wollte fahren lassen, daß man sich auf alle Weise einer solchen Lehre entgegensetzte, die Denjenigen, der sie annahm, zu einer bisher unbekannten, ja ungeahnten Denkfreiheit und Großheit der Gesinnungen berechtigte und aufforderte."

Vom Standpunkt der Relativität der Bewegung kann man über die *Wahrheit* oder *Falschheit* des Kopernikanischen Systems nicht streiten. Die Gesetze der Planetenbewegung werden nur viel *einfacher*, wenn man die Bewegung relativ zur Sonne statt relativ zur Erde konstruiert.

Newton legt seinem Aufbau der Mechanik in den Principia die Ideen der absoluten Zeit, des absoluten Raumes und der absoluten Bewegung zugrunde. „Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig, und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand." „Der absolute Raum bleibt, vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand, stets gleich und unbeweglich." „Die absolute Bewegung ist die Übertragung des Körpers von einem absoluten Orte (Teil des Raumes, welchen der Körper einnimmt) nach einem andern absoluten Ort." (Principia, S. 6—12.) Während nicht zu leugnen ist, daß es kinematisch keinen faßbaren Unterschied zwischen den verschiedenen möglichen Bewegungszuständen eines Körpers gibt, bemüht sich *Newton*, auf Grund solcher Erscheinungen wie der *Zentrifugalkräfte* die Ruhe *dynamisch* unter den möglichen Bewegungszuständen auszuzeichnen. „Die Ursachen, durch welche wahre und relative Bewegungen verschieden sind, sind die Kräfte, welche zur Erzeugung der Bewegung auf die Körper eingewirkt haben." „Die *wahren* Bewegungen der einzelnen Körper zu erkennen und von den *scheinbaren* scharf zu unterscheiden, ist übrigens sehr schwer, weil die Teile jenes unbeweglichen Raumes, in denen die Körper sich wahrhaft bewegen, nicht sinnlich erkannt werden können. Die Sache ist jedoch nicht gänzlich hoffnungslos. Es ergeben sich nämlich die erforderlichen Hilfsmittel teils aus den scheinbaren Bewegungen, welche die Unterschiede der wahren sind, teils aus den Kräften, welche den wahren Bewegungen als wirkende Ursachen zugrunde liegen. Werden

z. B. zwei Kugeln in gegebener gegenseitiger Entfernung mittels eines Fadens verbunden und so um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gedreht, so erkennt man aus der Spannung des Fadens das Streben der Kugeln, sich von der Achse der Bewegung zu entfernen, und kann daraus die Größe der kreisförmigen Bewegung berechnen ... Auf die wahren Bewegungen aus ihren Ursachen, Wirkungen und scheinbaren Unterschieden zu schließen, und umgekehrt, aus den wahren oder scheinbaren Bewegungen die Ursachen und Wirkungen abzuleiten, wird im folgenden ausführlicher gelehrt werden. *Zu diesem Ende habe ich diese Abhandlung verfaßt.*"

Der Glaube an den absoluten Raum ist bei *Newton* theologisch imprägniert. So heißt es in seiner Optik (Ed. sec., London 1719, S. 373, oder Ed. Whittaker, S. 370) von Gott, daß er „im unendlichen Raume, *gleichsam seinem Empfindungsorgan*, alle Dinge in ihrem Innersten durchschaut und sie in unmittelbarer Gegenwart völlig begreift". Er fußt hier auf der Theologie *Henry Mores*. *More* gilt der Raum als der erste und gültige Zeuge für die Wahrheit und Notwendigkeit „immaterieller Naturen", in seinen Eigenschaften findet er die Merkmale der göttlichen Substanz wieder, der Raum ist das Bindeglied zwischen ihr und den individuellen Dingen. Die einmalige Natur der Weltstruktur, daß sie nämlich in einer Faserung besteht, legt *Newton* so durch eine metaphysisch-apriorische Idee fest; aber *der Verlauf der Faserung in der wirklichen Welt ist aus ihrer Wirkung auf die beobachtbaren realen Erscheinungen zu ermitteln:* das ist sein naturwissenschaftliches Programm. Übrigens bewältigt *Newton* die Aufgabe nicht vollständig: er kann dynamisch lediglich die gleichförmige *Translation*, die reine Trägheitsbewegung eines Körpers, auf den keine Kräfte wirken, von den übrigen Bewegungszuständen unterscheiden, unter den Translationen aber gelingt es ihm nicht, die *Ruhe* auszusondern. Dies *kann* nicht gelingen wegen der Gültigkeit des sog. *speziellen Relativitätsprinzips*, dem die Gesetze der Newtonschen Mechanik genügen und das heute für alle Naturerscheinungen durch eine ganze Reihe subtilster Experimente belegt werden kann: In der Kajüte eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie dahinfahrenden Schiffes spielen sich alle Vorgänge genau so ab, wie wenn das Schiff ruhte; mit einem Naturvorgang ist immer auch derjenige möglich, der aus ihm hervorgeht, wenn man allen daran beteiligten Körpern eine gemeinsame gleichförmige Translation aufprägt. Das Prinzip wird von *Galilei* im Dialogo (Opere I, S. 206/207) klar und anschaulich entwickelt. *Newton* hilft sich hier durch eine in der Erfahrung nicht zu verankernde Hypothese und einen dialektischen Kniff, die sich inmitten des herrlich strengen induktiven Aufbaus seines Weltsystems im III. Buch der Principia gar sonderbar ausnehmen. Die Hypothese besagt, daß das Weltall ein Zentrum habe und das Zentrum sich in Ruhe befinde. Der gemeinsame Schwerpunkt des Sonnensystems bewegt sich, so wird weiter richtig aus den mechanischen Gesetzen geschlossen, wie der eines jeden äußeren Einwirkungen entzogenen Körpersystems, gleichförmig in gerader Linie. Und nun heißt es (Principia, S. 408): „Ginge er stets vorwärts, so würde das Zentrum der Welt sich nicht in Ruhe befinden", ohne daß die Identifizierung des Schwerpunktes des Planetensystems mit dem angenommenen ruhenden Weltzentrum irgend begründet würde (es sei denn dadurch, daß als ruhender Mittelpunkt jedenfalls nur ein solcher aus den materiellen Vorgängen konstruierbarer Punkt in Frage kommt, der nach den Gesetzen der Mechanik sich in gleichförmiger Translation befindet).

Die Erfahrungen, welche die dynamische Ungleichwertigkeit verschiedener Bewegungszustände erweisen, belehren uns darüber, daß die Welt eine Struktur trägt. Aber durch den Begriff des absoluten Raumes ist diese *Trägheitsstruktur* offenbar nicht richtig erfaßt, *der Schritt verläuft* nicht zwischen Ruhe und Bewegung, sondern *zwischen gleichförmiger Translation und beschleunigter Bewegung*. Im Hinblick auf die oben geschilderte graphische Darstellung können wir sagen: es steht in der Welt genau so wie im Raum: die Geraden sind unter allen Linien objektiv ausgezeichnet, hingegen können aus der Schar aller Geraden die „vertikalen" nur durch Konvention, die sich auf individuelle Aufweisung stützt, herausgehoben werden.

Wie steht es mit der *Schichtung*, dem Begriffe der Gleichzeitigkeit? Der Glaube an ihre objektive Bedeutung beruht ursprünglich zweifellos darauf, daß jedermann mit voller Selbstverständlichkeit die Dinge, die er sieht, in den Zeitpunkt ihrer Wahrnehmung setzt. So dehne ich *meine* Zeit über die ganze Welt aus, die in meinen Gesichtskreis rückt. Wenn nun auch dieser naiven Ansicht durch die Entdeckung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes der Boden entzogen wurde, so blieben doch noch (außer der Konservativität eines einmal gefaßten Vorurteils) einige Gründe bestehen, an jenem Glauben festzuhalten. In unserer graphischen Darstellung scheidet die durch einen Weltpunkt O laufende Horizontalebene Zukunft und Vergangenheit von O aus. Was heißt das? Schieße ich von O aus in allen Richtungen, mit allen möglichen Geschwindigkeiten Kugeln ab, so erreichen sie nur Weltpunkte, die später als O sind; in die Vergangenheit kann ich nicht schießen. Ebenso ist ein in O stattfindendes Ereignis nur auf das, was in späteren Weltpunkten geschieht, von Einfluß, während an der Vergangenheit „nichts mehr zu ändern ist". Die Schichtung hat also einen *kausalen* Sinn, sie fixiert den *Wirkungszusammenhang der Welt*. Dies hat *Leibniz* erkannt, der in den „Initia rerum Mathematicarum metaphysica" (Math. Schr. VII, S. 18) erklärt: „Wenn von zwei Elementen, die nicht zugleich sind, das eine den Grund des anderen einschließt, so wird jenes als *vorangehend*, dieses als *folgend* angesehen." Eine einfache Methode momentaner Zeitübertragung von einem Ort A zu einem andern B besteht darin, daß man einer von A nach B reichenden starren Stange in A einen Ruck erteilt; der in B beobachtete Ruck ist gleichzeitig mit dem in A erzeugten.

Aber hinsichtlich der Kausalstruktur der Welt hat die moderne Entwicklung zu einer wesentlichen Korrektur geführt. In der graphischen Darstellung bilden diejenigen Weltpunkte, in welchen ein in O gegebenes und allseitig mit gleicher Geschwindigkeit c sich ausbreitendes Lichtsignal eintrifft, den Mantel eines geraden Kreiskegels mit Spitze in O, dessen Öffnungswinkel 90^0 beträgt, wenn wir auf der t-Achse die eine Zeitsekunde darstellende Strecke ebenso lang machen wie die Raumstrecke, welche in der Horizontalebene E den vom Licht während einer Sekunde zurückgelegten Weg darstellt. Es hat sich zwingend ergeben *(Einsteins spezielle Relativitätstheorie)*, daß nicht die durch O laufende Horizontalebene, sondern *dieser nach rückwärts zu verlängernde Mantel des „Lichtkegels" die Scheidung der Welt in Vergangenheit und Zukunft besorgt:* keine Wirkung kann sich mit größerer als Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen (auch nicht der einer starren Stange zum Zweck der Zeitübertragung erteilte Ruck); die Geschwindigkeit jedes Körpers bleibt notwendig unterhalb c. Das ist eine unausweichliche Konsequenz des speziellen Relativitätsprinzips und der *„Konstanz der Lichtgeschwindigkeit"*, worunter die Tatsache zu verstehen ist, daß der von O ausgehende Lichtkegel unabhängig ist von dem Zustand, insbesondere dem Bewegungszustand der das Signal in O aussendenden Lichtquelle, also allein durch O bestimmt ist. — Befinde ich mich in O, so teilt O meine Lebenslinie, die Weltlinie meines Leibes, in zwei Stücke, Vergangenheit und Zukunft; daran ist nichts geändert. Was aber mein Verhältnis zur Welt betrifft, so liegen in dem vorderen Kegel alle diejenigen Weltpunkte, auf welche mein Tun und Lassen in O von Einfluß ist, außerhalb desselben alle die Ereignisse, die abgeschlossen hinter mir liegen, an denen jetzt nichts mehr zu ändern ist: der vordere Kegel ist meine *aktive Zukunft*. Hingegen sind im Innern des hinteren Kegels alle diejenigen Ereignisse lokalisiert, die ich entweder leibhaftig miterlebt (mitangesehen) habe oder von denen mir irgendeine Kunde gekommen sein kann, nur diese Ereignisse haben möglicherweise Einfluß auf mich gehabt: es ist das Gebiet meiner *passiven Vergangenheit*. Beide Gebiete, das der aktiven Zukunft und der passiven Vergangenheit, grenzen nicht zwischenraumlos aneinander, wie es nach der alten Auffassung der Fall war.

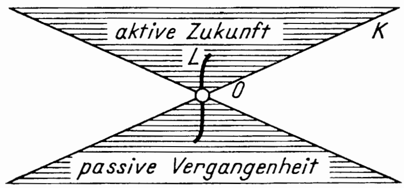


Fig. 2. Kausalstruktur. Lichtkegel $\mathfrak{K}$, Lebenslinie L.

Weiter gilt es, physikalisch zu schildern, wie die *Gleichheit von Zeiten* und die *Kongruenz materieller Körper* festgestellt werden. Eine *Uhr* ist ein abgeschlossenes materielles System, das einmal genau zu demselben Zustand Z zurückkehrt, in dem es sich bereits in einem früheren Moment befand. Unter Voraussetzung des Kausalitätsprinzips in der Form, daß der Zustand eines Systems in einem Moment seine ganze Geschichte eindeutig bestimmt, wird sich dann der gleiche Vorgang, die gleiche zyklische Zustandsfolge, die von Z zu Z führt, immer wiederholen, und jede dieser Perioden hat *per definitionem* die gleiche Zeitdauer. Was hierdurch gemessen wird, nennt man die *Eigenzeit* der Uhr, sie ist ohne weiteres brauchbar für alle Ereignisse, die längs der Weltlinie der Uhr sich zutragen. *Helmholtz* sagt (Zählen und Messen, Wissensch. Abhdlg. III, S. 379): „Zeitmessung setzt voraus, daß physische Vorgänge gefunden seien, die, in unverändert gleicher Weise und unter gleichen Bedingungen sich wiederholend, wenn sie in demselben Moment (richtiger wäre zu sagen: in unmittelbar benachbarten Raumzeitpunkten) begonnen haben, auch wieder gleichzeitig enden, wie z. B. Tage, Pendelschläge, Ablauf von Sand- und Wasseruhren. Die Berechtigung für die Annahme der unveränderten Dauer liegt hierbei nur in dem Umstande, daß alle verschiedenen Methoden der Zeitmessung, sorgfältig ausgeführt, immer wieder übereinstimmende Resultate liefern." Und was die empirische Bestimmung räumlicher Kongruenz anlangt, so heißt es an anderm Ort (Wissensch. Abhdlg. II, S. 648): „Physisch gleichwertig nenne ich Raumgrößen, in denen unter gleichen Bedingungen und in gleichen Zeitabschnitten die gleichen physikalischen Vorgänge bestehen und ablaufen können. Der unter geeigneten Vorsichtsmaßregeln am häufigsten zur Bestimmung physisch gleichwertiger Raumgrößen gebrauchte Prozeß ist die Übertragung starrer Körper, wie der Zirkel und Maßstäbe, von einem Ort zum anderen." Es ist eine Tatsache, daß, wenn ein und derselbe *bestimmte* physikalische Vorgang gleicherweise in den beiden Raumstücken $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ möglich ist, auch *jeder* in $\mathfrak{S}$ sich abspielende Vorgang in ungeänderter Art innerhalb $\mathfrak{S}'$ ablaufen kann. Ein Körper wird dadurch als starrer Körper erprobt, daß er sich immer wieder als unverändert in allen seinen Beschaffenheiten erweist, wenn er unter die gleichen Bedingungen zurückgebracht wird. Die auf diesen physikalisch nachprüfbaren Kongruenzbegriff sich stützende physische Geometrie betrachtet *Helmholtz* als eine Erfahrungswissenschaft, als „die erste und vollendetste der Naturwissenschaften". Von ihr spricht auch *Riemann* in seinem Habilitationsvortrag und weist darauf hin, was für die Physik der Zukunft möglicherweise von großer Bedeutung werden wird, daß „die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Maßbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit verlieren". — Übrigens läßt sich zeigen, daß durch die Trägheits- und Kausalstruktur die Maßstruktur der Welt bereits mit festgelegt ist, daß es zur Messung also der Uhren und starren Körper nicht mehr bedarf, sondern man mit Lichtsignalen und kräftefrei sich bewegenden Massenpunkten sein Auslangen findet.

Habe ich ein dreidimensionales Kontinuum irgendwie auf Koordinaten x_0, x_1, x_2 bezogen, so ist es dadurch auf den dreidimensionalen Zahlenraum, das Kontinuum der Zahlentripel, abgebildet; den Zahlenraum will ich hier, um mich einer dem Leser mehr geläufigen Ausdrucksweise bedienen zu können, ersetzen durch den mit einem Cartesischen Koordinatensystem ausgestatteten Anschauungsraum. Man muß dann freilich, um das Verfahren auf die vierdimensionale Welt anzuwenden, in Gedanken eine Dimension streichen. Ein zweidimensionales Beispiel sind die ebenen geographischen Karten. Unter Zugrundelegung der Merkatorkarte konstatiere ich z. B. ,daß San Franzisko, die Südspitze von Grönland und das Nordkap in gerader Linie liegen; werde mich aber dann nicht wundern, daß auf einer orthographischen Projektion, welche die nördliche Halbkugel der Erde darstellt, dies keineswegs der Fall ist. Ebenso dient eine bestimmte Abbildung der Welt als Grundlage für die Verwendung der üblichen geometrisch-kinematischen Termini, wobei der x_0-Achse die Bedeutung der Zeitachse zugeschrieben werde. (Von einem Körper, dessen Weltlinie im Bilde als eine vertikale Gerade erscheint, d. h. als eine Linie, auf welcher von den vier Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 nur x_0 sich ändert, werden wir also z. B. sagen, daß er ruhe.) Objektive Bedeutung haben nur solche Beziehungen, welche unabhängig von der gewählten Abbildung bei beliebiger Deformation des Bildes bestehen bleiben; eine solche Beziehung ist z. B. das Sich-schneiden zweier Weltlinien. Soll eine spezielle Abbildung oder eine spezielle Klasse von Abbildungen gekennzeichnet werden, so muß dies physikalisch auf Grund der wirklichen Vorgänge *und der Struktur* geschehen: so verlangt es das „*allgemeine Relativitätspostulat*“. Nach der „*speziellen Relativitätstheorie*“ läßt sich insbesondere eine solche „Karte“ der Welt entwerfen, in welcher 1. die Weltlinie jedes kräftefrei sich bewegenden Massenpunktes als Gerade erscheint, und 2. der von einem beliebigen Weltpunkt ausstrahlende Lichtkegel durch einen vertikalen geraden Kreiskegel vom Öffnungswinkel 90^0 dargestellt wird. Dieser Theorie nach hat also die Trägheits- und Kausalitäts-, damit aber auch die Maß-Struktur den Charakter des Starren, ein für allemal absolut Festgelegten. Unter jenen „normalen Abbildungen“, welche den eben genannten Bedingungen genügen, läßt sich objektiv, ohne individuelle Aufweisung, keine engere Auswahl treffen.

Die Diskrepanz zwischen der kinematischen und dynamischen Analyse der Bewegung verlangt nach einer Auflösung. *Huyghens* hat sich, wie wir aus seinen Briefen wissen, bemüht, auch in der Dynamik den Standpunkt der Gleichwertigkeit aller Bewegungszustände durchzuführen; in seinen nachgelassenen Papieren ist ein dahingehender Versuch aufbewahrt worden (abgedruckt: Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinig. 29, 1920, S. 136). In unsern Tagen hat *Mach* in seiner Mechanik (7. Aufl. 1912) das gleiche unternommen; er möchte in der Abplattung der Erde eine Wirkung ihrer Rotation *relativ zu den Fixsternen* sehen, die Fixsterne sollen die Ebene des Foucaultschen Pendels halten und mitführen. *Leibniz* hingegen, wie bestimmt er sich auch gegen *Newtons* Metaphysik des Raumes wehrt, daran festhaltend, daß der Raum nicht mehr ist als „die bloße Ordnung der Körper untereinander", stimmt doch *Newtons* mechanischem Programm, die wahre Bewegung von der scheinbaren durch dynamische Kriterien zu unterscheiden, offenbar zu (vgl. Brief an *Huyghens* vom 12./22. Juni 1694, Math. Schr. II, S. 184, und die Erklärung in den In. rerum Math. metaph., Math. VII, S. 20: „Wir sagen, daß ein Objekt sich *bewegt*, wenn es seine Lage ändert und zugleich der Grund für diese Veränderung in ihm selbst gelegen ist"). *Euler* (Theoria motus 1765, insbesondere § 81) ist ebenfalls der Meinung, daß man das Prinzip der Relativität der Bewegung, wie einleuchtend es der Vernunft sei, notgedrungen den dynamischen Erfahrungen zum Opfer bringen müsse. Aus *Kants* Darlegungen in den „Metaphysischen Anfangsgründen" kann man zur Not eine richtige Formulierung des Problems herauslesen, sie enthalten aber keinerlei Aufklärung.

Übrigens hängt gemäß dem allgemeinen Relativitätspostulat der Begriff der relativen Bewegung mehrerer Körper gegeneinander, solange wir uns auf keine Weltstruktur stützen können, ebenso in der Luft wie der der absoluten Bewegung eines einzigen. Denn denkt man sich die vierdimensionale Welt als eine Plastelinmasse, die von einzelnen sich nicht schneidenden, aber sonst ganz unregelmäßig verlaufenden Fasern, den Weltlinien der Materieteilchen durchzogen ist, so kann man das Plastelin stetig so deformieren, daß nicht nur eine, sondern alle Fasern vertikale Gerade werden. Darum ist eine Lösung des Problems, die in konsequenter Verfolgung der *Huyghens-Mach*schen Tendenzen eine Weltstruktur überhaupt ausschalten will, unmöglich. Suchen wir daher notgedrungen die Ursache für die dynamische Ungleichwertigkeit der Bewegungen in der Trägheitsstruktur der Welt, so erkennen wir klar, worin das Unbefriedigende der besprochenen Situation liegt: darin, daß etwas, was so mächtige Wirkungen tut wie die Trägheit — wenn sie z. B. bei einem Zugzusammenstoß im Kampf mit den Molekularkräften der beiden aufeinander fahrenden Züge die Wagen zerreißt —, selber nur eine starre, ein für allemal feste geometrische Beschaffenheit der Welt sein soll. Den dynamischen Charakter der Trägheit als einer den ablenkenden Kräften Widerstand entgegensetzenden Tendenz hat *Leibniz* (gegen *Descartes*) energisch betont, u. a. an *de Volder* (Philos. Schr., ed. Gerh., II, S. 170): „Aber es ist nicht dasselbe, ob etwas nur seinen Zustand beibehält, bis etwas eintritt, was ihn verändert — ein Fall, der auch dann vorkommt, wenn das Subjekt gegen beide Zustände ganz indifferent ist — oder aber, ob es, was weit mehr bedeutet, nicht indifferent ist, sondern eine Kraft und gleichsam eine Neigung hat, seinen Zustand beizubehalten und so der verändernden Ursache Widerstand zu leisten." Die Lösung ist demnach gegeben, sobald man sich entschließt, *die Trägheitsstruktur als etwas Reales anzuerkennen, das Wirkungen auf die Materie nicht nur übt, sondern auch von ihr erleidet*. Das ist der Schritt, den für die Maßstruktur des Raumes bereits *Riemann* tat; und in der Tat ist die Trägheits- mit der Maß-Struktur so eng verknüpft (legen doch die Maßverhältnisse des Raums die geraden Linien fest), daß man notwendig das Maßfeld als veränderungsfähig ansetzen muß, wenn man das Trägheitsfeld aus seiner geometrischen Starre erlöst.

Einstein fand, unabhängig von *Riemann*, diesen Gedanken wieder und ergänzte ihn durch eine wichtige Erkenntnis, welche ihn erst physikalisch fruchtbar machte: aus der *Gleichheit von schwerer und träger Masse*, die vor ihm nur als ein rätselhaftes Faktum konstatiert aber nicht verstanden war, leitete er ab, daß die *Gravitation* in dem Dualismus von Trägheit und Kraft auf die Seite der Trägheit, nicht der Kraft gehört. *In den Erscheinungen der Gravitation gibt sich also des Trägheits- oder*, wie ich lieber sage, *des Führungs-Feldes Veränderungsfähigkeit und Abhängigkeit von der Materie kund.* Die Zerspaltung des einheitlichen Führungsfeldes in einen homogenen, dem Galileischen Gesetz genügenden Bestandteil und eine viel schwächere Abweichung davon, Gravitation genannt, die sich um die einzelnen Sterne herumlegt, ist nicht absolut, sondern nur relativ zu einem bestimmten Koordinatensystem möglich. Aus dieser Auffassung ergaben sich zwingend die an die Stelle des Newtonschen Attraktionsgesetzes tretenden Gesetze, nach denen die Materie auf das Trägheitsfeld einwirkt. Diese Folgerungen haben sich in der Erfahrung bestätigt.

Das Führungsfeld wird durch die Materie (schwach) erregt, wie eine Seefläche von den Dampfern, welche sie durchfahren; es geht in den durch die spezielle Relativitätstheorie geschilderten unerregten Zustand über, wenn alle Materie verschwindet, wie die Seefläche sich zur homogenen Ebene glättet, wenn die Schiffe im Hafen sind. Obwohl auch *Einstein* mit jenem *Mach*schen Gedanken liebäugelt, ist es doch nach einer obigen Bemerkung ausgeschlossen, das Führungsfeld oder den „*Äther*" als eine selbständige Macht aus dem Naturgeschehen auszuschalten; nicht die Sterne führen die Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels, sondern das Zusammengehen beider, des Foucaultschen Pendels und des Sternenkompasses, den die Richtungen der von den Sternen her eintreffenden Lichtstrahlen am irdischen Beobachtungsort bilden, beruht auf der *gewaltigen Übermacht des Äthers in seiner Wechselwirkung mit der Materie.* Nur darin irrte die alte, Trägheit und Gravitation absolut voneinander scheidende Auffassung, daß sie, im Bilde gesprochen, die tatsächliche Lage aller Wasserteilchen in dem durch die Schiffe erregten Seebecken aus einer absolut ausgezeichneten Ruhelage und einer durch die Schiffe bewirkten Elongation zusammensetzen wollte. Das ist falsch; denn kommt das Wasser am Abend, wenn alle Schiffe im Hafen sind, wieder zur Ruhe, so haben wir wohl denselben „qualitativen Zustand" wie am Morgen vor dem Ausfahren der Schiffe: die ungekräuselte ebene Fläche; aber der „materielle Zustand", der sich dahinter verbirgt, nämlich der Ort der verschiedenen Wasserteilchen, kann sich vollständig verschoben haben. Dies ist kein Widerspruch gegen den Satz vom zureichenden Grunde, welcher einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtszustand des Seebeckens verlangt. Denn wenn alle Wasserteilchen gleichartig sind, so sind zwei Zustände des Seebeckens Z, Z', die dadurch auseinander hervorgehen, daß die Teilchen ihre Orte irgendwie untereinander vertauschen, jeder für sich betrachtet, durch nichts unterschieden. Nur nachdem man „ein Koordinatensystem zugrunde gelegt", d. h. hier die Teilchen mit Nummern versehen hat, welche *künstliche* Unterschiede unter ihnen einführen und während der Bewegung an ihnen haften bleiben, kann man von den beiden materiellen Zuständen Z, Z' als solchen sprechen (vgl. Anhang B). In Wahrheit ist aber nicht der einzelne materielle Zustand Z, die *Anordnung*, etwas Faßbares, sondern nur die Verschiebung des materiellen Zustandes $Z \to Z'$, die *Permutation.* Man vergleiche dazu die oben wiedergegebenen Bemerkungen *Leibnizens* zur Relativität des Ortes (S. 127/128).

Die Gruppe Δ_0 der euklidischen Drehungen (s. § 15) im dreidimensionalen Raum ist nun durch die sogenannte Lorentzgruppe ersetzt worden. Sie besteht aus allen homogenen linearen Transformationen

$$z_i' = \sum_k a_{ik} z_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

die die indefinite quadratische Form $-z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ invariant lassen. Für jede dieser Transformationen sind die absoluten Werte der Koeffizienten $a = a_{00}$ und der Determinante d aus den 3×3 Koeffizienten a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ größer oder gleich 1. Der Transformation erteilen wir die zeitliche Signatur $+$ oder $-$, je nachdem $a \geq 1$ oder $a \leq -1$ ist; ebenso bestimmt das Vorzeichen von d die räumliche Signatur. Die Lorentztransformationen mit zeitlicher Signatur $+$ bilden eine Untergruppe mit Index 2 der gesamten Gruppe, ebenso die Transformationen mit der räumlichen Signatur $+$. Ihr gemeinsamer Teil ist in jeder von ihnen wiederum als Untergruppe mit Index 2 enthalten. Die Transformationen mit der zeitlichen Signatur — wechseln zwischen Vergangenheit und Zukunft, die mit der räumlichen Signatur — wechseln zwischen links und rechts. Die fundamentalsten Erfahrungen unseres Lebens scheinen dahin zu gehen, daß Δ_0 auf die Lorentztransformationen mit der zeitlichen Signatur $+$ (aber unter Einschluß derer mit der räumlichen Signatur —) beschränkt wird. Die Physik aber hat es für recht schwierig befunden, diese Frage zu entscheiden (s. § 23 C). Eine weitere Signatur, die topologische, wird der Koordinatentransformation angefügt, sie ist durch das Vorzeichen ihrer Jacobischen Determinante bestimmt.

Wir ziehen mit der „allgemeinen Relativitätstheorie“ das Fazit der bisherigen historischen Entwicklung des Strukturproblems von Raum und Zeit folgendermaßen. *Die Welt ist ein vierdimensionaler Riemannscher Raum*, in welchem nach Festlegung einer Maßeinheit jedem von einem Punkte P mit den Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 ausstrahlenden Linienelemente, das nach dem unendlich benachbarten Punkte $P' = (x_i + dx_i)$ führt, eine Maßzahl

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} dx_i dx_k \qquad (g_{ki} = g_{ik})$$

zukommt, die unabhängig ist vom benutzten willkürlichen Koordinatensystem. Die Koeffizienten g_{ik} hängen von den Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 von P, aber nicht von den dx_i ab. Die auf der rechten Seite stehende *metrische Fundamentalform* ist aber nicht positiv-definit, sondern besitzt eine negative Dimension; d. h. sie läßt sich durch Einführung geeigneter Koordinaten im Punkte P auf die nichts Unbestimmtes enthaltende Normalform

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

bringen. Nur zufolge dieses Umstandes scheidet der „Lichtkegel in *P*“, auf welchem die von *P* ausgehenden Linienelemente liegen, die ds^2 zu Null machen, ein Gebiet der aktiven Zukunft von einem Gebiet der passiven Vergangenheit für *P*. Die Fundamentalform determiniert in einer leicht näher zu beschreibenden Weise *das Verhalten der Uhren und Maßstäbe*, sie legt den *Verlauf der Lichtkegel in ihrer ganzen Ausdehnung* fest und scheidet die *Weltlinien der reinen Trägheitsbewegung* (denen z. B. die Planeten folgen) aus der Gesamtheit aller möglichen Weltlinien aus. Ihre Koeffizienten, die stetigen Funktionen g_{ik} (x_0, x_1, x_2, x_3) beschreiben relativ zu dem gewählten Koordinatensystem das Maßfeld oder den „*Zustand des Äthers*“, der mit der Materie in Wechselwirkung steht.

Bei der Frage nach der *ganzen Ausdehnung der Welt* muß man unterscheiden zwischen den rein *topologischen* und den *Maßverhältnissen. Bruno* empfand den Übergang von dem in die Kristallsphäre eingeschlossenen, um ein Zentrum kreisenden Aristotelischen Weltsystem zu der indifferenten Weite des unendlichen, unzentrierten, überall von Sternen bevölkerten euklidischen Raumes, welcher der neueren Naturforschung zugrunde liegt, als eine mächtige Befreiung. Dennoch ist der Aristotelische Raum (wenn die begrenzende Kugelfläche nicht mehr zum Raum gehört) topologisch gar nicht, sondern nur seinen Maßbeziehungen nach von dem unendlichen verschieden. Der unendliche euklidische Raum führt zu Ungereimtheiten, wenn man annimmt, daß die Massen im großen gleichförmig durch das ganze Weltall verteilt sind und das Newtonsche Attraktionsgesetz gilt. Die entfernten Massen würden nämlich dann, obwohl die Gravitationskraft einer konstanten Masse mit dem reziproken Quadrat der Entfernung abnimmt, in der gesamten Gravitationswirkung derart überwiegen, daß die auf einen Stern ausgeübte Gesamtkraft ganz unbestimmt würde. Es ist aber auch möglich, daß der Raum endlich und dennoch unbegrenzt ist; wenn er nämlich in Analogie zu der geschlossenen zweidimensionalen Kugelfläche eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit wäre. Nach einer ansprechenden Deutung von *A. Speiser* (Klassische Stücke der Mathematik,1925,

S. 53) hat *Dante* dadurch, daß er die vom Erdmittelpunkt, dem Sitze des Satanas, ausgehenden Radien nach einem Gegenpol, dem Quellpunkt der göttlichen Kraft, konvergieren läßt, des *Aristoteles* begrenzten Raum (der für das durch die Sinne wahrgenommene Abbild bestehen bleibt) im urbildlichen Sein zum *geschlossenen Raum* umgewandelt: des persönlichen Gottes Kraft muß von einem Zentrum ausstrahlen, kann nicht in räumlich-überräumlicher Ergossenheit die Weltkugel umfangen wie des *Aristoteles* „unbewegter erster Beweger". (Vgl. Divina Commedia, Paradiso, vom 28. Gesange ab.) In Zusammenhang mit seiner Gravitationstheorie und dem Versuch, in ihr das *Mach*sche Prinzip zur Durchführung zu bringen, konstruiert *Einstein* ein statisches Universum U_a mit einem geschlossenen dreidimensionalen Raum, in dem die Materie gleichmäßig verteilt ist; die Gesamtmasse aller Sterne determiniert das Volumen des Gesamtraumes. Er entbehrt natürlich, im Gegensatz zum Danteschen Raum, eines ausgezeichneten Poles und Gegenpoles, ist vielmehr ebenso homogen wie der euklidische. U_a ergibt sich als mögliche Lösung der Gravitationsgesetze, vorausgesetzt, es wird in diese der sogenannte kosmologische Term einbezogen, der eine universelle Konstante a von der Dimension einer Entfernung (und der Größenordnung des „Weltradius") einführt.

Wenn man zwei seiner räumlichen Dimensionen streicht, kann man sich U_a als vertikale Kreiszylinderfläche mit Radius a und unendlicher Ausdehnung nach beiden Richtungen vorstellen. Dies zeigt, daß U_a zwei getrennte „Säume" besitzt, einen in der unendlich fernen Vergangenheit und den andern in der unendlich fernen Zukunft, und in diesem topologischen Sinne erstreckt sich U_a von Ewigkeit zu Ewigkeit. Mit der gleichen Reduktion der Dimensionen ist die Karte des Universums U_∞ nach der gemeinsamen Auffassung Euklid-Bruno, das heißt einer leeren Welt, deren Maßstruktur von der speziellen Relativitätstheorie beschrieben wird, eine vertikale Ebene und besitzt daher nur einen zusammenhängenden Saum. Auf diesen topologischen Unterschied zwischen U_a und U_∞ (zwei Säume gegenüber einem) laufen letzten Endes die Begriffe geschlossener und offener Raum hinaus.

Die Maßverhältnisse sind nach der Einsteinschen Kosmologie derartig, daß der von einem Weltpunkt ausgehende Lichtkegel sich unendlichoft überschlägt; von einem Sterne müßte ein Beobachter danach (wenn die Bilder nicht durch dünne trübende Medien im Weltenraum und durch Ablenkungen verwaschen werden), unendlichviele Bilder erblicken, die ihm den Stern in Zuständen zeigen, zwischen denen jedesmal die Zeit verflossen ist, die das Licht braucht, um rund um die Weltkugel zu laufen. Die Gegenwart wäre durchsetzt von den Gespenstern des Längstvergangenen. Doch ermöglichen nach *de Sitter* die Gravitationsgesetze auch eine massenleere, von Ewigkeit zu Ewigkeit sich erstreckende Welt, in welcher die Selbstüberdeckung des von einem Weltpunkt ausgehenden Gebietes der Zukunft nicht stattfindet. Die systematische Verschiebung der Spektrallinien der entferntesten Himmelsobjekte, der Spiralnebel, nach der roten Seite des Spektrums, ist im Sinne eines sich ausdehnenden Universums gedeutet worden, von dem de Sitters Konstruktion das einfachste Mittel liefert (Weyl, Friedmann, Lemaitre, H. P. Robertson u. a.). Für a erhält man so einen Wert von ungefähr 10^{27} cm. Übrigens folgt das Verhalten einer jeden Welt, die gewissen natürlichen Homogenitätsbedingungen im Großen (ob sie leer ist oder Masse enthält) genügt, asymptotisch diesem Modell, wenn der Weltradius beim Expansionsprozeß wesentlich größer als a wird. (Vergleiche auch § 23 C.) — Die Forderung, daß von jedem Weltpunkt O aus zwei (nicht nur in der nächsten Umgebung von O, sondern in ihrem ganzen Verlauf) *getrennte* Weltgebiete der aktiven Zukunft und der passiven Vergangenheit sich ergeben sollen, macht eine nicht nur räumlich, sondern auch *zeitlich geschlossene Welt* unmöglich; in ihr würde das objektiv Einmalige nach der von Geschlecht zu Geschlecht sich fortpflanzenden Tradition als „*ewige Wiederkunft*“ (Nietzsche) desselben Weltablaufs erscheinen.

LITERATUR

I. Newton, Philosophiae naturalis Principia Mathematica. London 1687; zitiert ist nach der 3. Ausgabe, London 1726.

L. Lange, Die geschichtl. Entwicklung des Bewegungsbegriffs, 1886.

Das Relativitätsprinzip (Sammlung der wichtigsten Arbeiten von *H. A. Lorentz*, *A. Einstein*, *H. Minkowski*, *H. Weyl*), herausgegeben von *O. Blumenthal*, 5. Aufl. Leipzig 1923.

M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen, 3. Aufl. 1922.

H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl. 1923.

A. S. Eddington, Space, Time, and Gravitation. Cambridge 1920. The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge 1923. The Expanding Universe. Cambridge 1937.

H. P. Robertson, Relativistic Cosmology. Reviews of Modern Physics 5, 62—90 (1933).

17. Subjekt und Objekt (Die naturwissenschaftliche Auswirkung der Erkenntnistheorie)

Die Lehre von der Subjektivität der Sinnesqualitäten ist mit dem Aufbau der Naturwissenschaft eng verknüpft, seit *Demokrit* den Grundsatz aufstellte: „Nur in der Meinung (*νόμῳ, οὐ φύσει*) besteht das Süße, in der Meinung das Bittere, in der Meinung das Kalte, das Warme, die Farbe"; das wahrhaft Wirkliche aber seien unveränderliche Substanzteilchen, Atome, die sich im leeren Raum bewegen. Auch nach *Plato* (Theaitetos 156e) sind jene „Eigenschaften, hart, warm, und wie sie alle heißen, an und für sich nichts", sondern entstehen durch das Zusammentreffen einer vom Subjekt und einer vom Objekt ausgehenden „Bewegung". Das Wirkliche ist reine Aktivität; nur im „Bild", im Bewußtsein, das in der Mitte schwebt, ist Leiden. „Weiß oder rot, bitter oder süß, tönend oder stumm, wohl- oder übelriechend sind Namen für Wirkungen auf die Sinnesorgane", sagt *Galilei*, sie dürfen den Dingen selber ebensowenig zugeschrieben werden wie der Kitzel oder Schmerz, welchen die Berührung von Gegenständen hervorrufen kann. Eingehend handelt *Descartes* davon in den Schlußparagraphen der Principia und im Traité de la Lumière (die Theorie der Gesichtswahrnehmung verdankt ihm wichtige Fortschritte), ebenso *Locke*, On human understanding, 2. Buch, 8. Kap. §§ 13—22. In zweierlei Hinsicht, in philosophischer und in naturwissenschaftlicher, muß die Subjektivität der Sinnesqualitäten behauptet werden. Erstens kann eine solche Qualität ihrem Wesen nach nur im Bewußtsein, in der *Empfindung* gegeben sein; man sieht in ihr entweder eine der Empfindung anhaftende Beschaffenheit oder, bei feinerer Analyse, nicht ein reelles Moment an der Empfindung selbst, sondern eine dem intentionalen Objekt, das sich im Bewußtseinsakt „hinbildet", zugehörige Entität. Aber es ist schlechterdings unverständlich, wie die Qualität, losgelöst vom Bewußtsein, einem Ding an sich als Eigenschaft an sich beigelegt werden kann. Dies ist überhaupt der *Grundgedanke des erkenntnistheoretischen Idealismus.* Zweitens hängen die Qualitäten, mit denen sich für mich die Dinge der Außenwelt bekleiden, außer von ihnen selber ganz wesentlich ab erstens *von den näheren physischen Umständen,* insbesondere im Falle der Farbe von Beleuchtung und von der Beschaffenheit des zwischen dem Gegenstand und meinem Auge befindlichen Mediums, und zweitens von *mir, von meiner psychophysischen Organisation.* Auch mein Sehorgan ergreift die Gegenstände nicht an ihrem Ort; sondern was ich sehe, ist allein bestimmt durch den Zustand des optischen Feldes an der Berührungsstelle mit meinem Sinnesleib (der Retina). Das sind naturwissenschaftliche Tatsachen, die auch der Realist zugeben muß. Wie anders würde uns die Welt visuell erscheinen, wenn unser Auge für andere Wellenlängen empfindlich wäre oder wenn die physiologischen Prozesse auf der Retina das unendlichdimensionale Reich der physikalisch verschiedenen zusammengesetzten Farben nicht in eine bloß 2-dimensionale, sondern eine 3- oder 4-dimensionale Mannigfaltigkeit verwandelten!

Im Gegensatz zu den *„sekundären"* werden die *primären, die raumzeitlichen Eigenschaften* der Körper, Größe, Gestalt und Bewegung, von *Demokrit,* von *Descartes,* von *Locke* für objektiv erklärt. „Die Ideen der primären Eigenschaften", heißt es a.a.O. bei *Locke,* „sind Ebenbilder, die der sekundären nicht." Während man nach *Descartes* zwischen realem Vorgang und Wahrnehmung (Schallwellen und Ton) so wenig eine Ähnlichkeit fordern darf wie zwischen einer Sache und dem sie bezeichnenden Wort, hält er daran fest, daß die auf den Raum bezüglichen Ideen objektive Geltung haben, weil wir sie im Gegensatz zu den Qualitäten klar und deutlich erkennen. Was wir aber so erkennen, ist nach dem Grundsatz seiner Erkenntnislehre *wahr.* Zur Stütze dieses Prinzips muß er sich freilich auf die Wahrhaftigkeit Gottes berufen, der uns nicht täuschen wolle. Ist einmal der Grundgedanke des Idealismus aufgeleuchtet, soll aber trotzdem die reale Welt aus Elementen aufgebaut werden, die im Bewußtsein liegen, aber als real hingenommen werden, weil sie aus irgendeinem Grund als besonders vertrauenerweckend erscheinen, so kommt man offenbar um einen solchen die Wahrheit verbürgenden Gott nicht herum. „Er ist die Brücke ... zwischen dem einsamen, irren, nur einem, dem Selbstbewußtsein gewissen Denken und der Außenwelt. Der Versuch ist etwas naiv ausgefallen, aber man sieht doch, wie scharf schon *Cartesius* das Grab der Philosophie abmaß; sonderbar ist freilich, wie er den lieben Gott als Leiter gebrauchte, um herauszukriechen. Doch schon seine Zeitgenossen ließen ihn nicht über den Rand ..“ (Aus *Georg Büchners* philosophischen Aufzeichnungen). *Hobbes* (De corpore) geht von der Fiktion einer Aufhebung des Universums aus (ähnlich Husserls „epoché“), um es dann schrittweise durch Konstruktion aus der Vernunft wieder entstehen zu lassen; aber auch er benutzt dabei als Konstruktionsmaterial die allgemeinen Vorstellungen, welche den Rückstand der Erfahrung bilden, insbesondere die Vorstellungen von Raum und Zeit. Diesem Standpunkt entspricht die Physik von *Galilei*, *Newton*, *Huyghens*, welche das Weltgeschehen als anschaulich vorgestellte Bewegungsvorgänge im Anschauungsraum konstruiert; sie hat daher einen absoluten euklidischen Raum als stehendes Medium nötig, in welches die Bewegungen sich einzeichnen. Bekannt ist die Äußerung *Galilei*s (Opere ed. Alberi VII, S. 355): „Das wahre Buch der Philosophie ist das Buch der Natur, welches immer aufgeschlagen vor unseren Augen liegt, es ist aber in anderen Lettern geschrieben als in denen des Alphabets; die Lettern sind Triangel, Quadrate, Kreise, Kugeln, Kegel, Pyramiden und andere geometrische Figuren.“

Zu radikalerer Auffassung dringt *Leibniz* vor: „Betreffs der Körper kann ich beweisen, daß nicht nur Licht, Wärme, Farbe u. dgl., sondern auch Bewegung, Figur und Ausdehnung nur erscheinende Qualitäten sind“ (Philos. Schr. VII, S. 322). Auch *Berkeley* und *Hume* sind zu nennen. *D'Alembert* rechtfertigt den Gebrauch des „Rückstandes der Erfahrung“ zur Konstruktion der objektiven Welt nicht mehr wie *Descartes* durch die Klarheit und Deutlichkeit der Ideen, sondern allein durch den Erfolg der Methode. Nach *Kant* sind *Raum und Zeit* lediglich *Formen unserer Anschauung*. *Stumpf* (Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung, 1873, S. 22) bezeichnet es als unsinnig, die Atome sich als räumliche Körper ohne Farbqualitäten vorzustellen, durch deren Bewegungsspiel erst die Ätherschwingungen ausgelöst werden, welche vermöge ihrer Wellenlänge Träger der Farbe sind; denn so wenig eine Farbe ohne räumliche Ausdehnung, so wenig könne (nach der Lehre von *Berkeley* und *Hume*) ein Raum ohne eine ihn bekleidende Farbqualität vorgestellt werden. Als Medium, in welchem die Physik die Außenwelt konstruiert, darf darum nicht der anschauliche Raum und die anschauliche Zeit dienen, sondern ein vierdimensionales Kontinuum im abstrakt-arithmetischen Sinne. Waren die Farben für *Huyghens* „in Wirklichkeit" Ätherschwingungen, so erscheinen sie jetzt nur noch als mathematische Funktionsverläufe von periodischem Charakter, wobei in den Funktionen als Repräsentanten des auf Koordinaten bezogenen raumzeitlichen Mediums vier unabhängige Variable auftreten. Was übrigbleibt, ist somit schließlich eine *symbolische Konstruktion*, genau in dem Sinne, wie sie von *Hilbert* in der Mathematik durchgeführt wird.

Die Konstruktion dieser nur noch in Symbolen darzustellenden objektiven Welt aus dem mir in der Anschauung unmittelbar Gegebenen vollzieht sich in verschiedenen *Stufen*, wobei der Fortgang von Stufe zu Stufe dadurch erzwungen wird, daß jeweils das auf einer Stufe Vorhandene sich als Erscheinung einer höheren Wirklichkeit, der Wirklichkeit nächster Stufe, enthüllt. Das typische Beispiel dafür ist, wie sich die räumliche Körpergestalt als ein Identisches in den verschiedenen perspektivischen Ansichten konstituiert. Vorbedingung dafür ist, daß der Standpunkt, von dem aus das einzelne perspektivische Bild erscheint, variiert wird und die verschiedenen wirklich eingenommenen Standpunkte selber sich geben als Ausschnitt aus einem in uns angelegten, wenn schon unendlichen Kontinuum von *Möglichkeiten*. Wir kommen darauf im nächsten Paragraphen zurück. Die systematische naturwissenschaftliche Darstellung wird aber den umgekehrten Weg gehen: sie wird die Symbolwelt rein für sich hinstellen und dann, alle Zwischenstufen überspringend, zu schildern versuchen, welche objektiven Zustandsverläufe zu welchen unmittelbaren Bewußtseinsgegebenheiten führen.

So lehrt die *Perspektive* aus der räumlichen Gestalt eines Körpers und dem Standort des Beobachters relativ zum Körper das optische Bild finden. Ein schon den obersten Stufen angehöriges physikalisches Beispiel ist die Konstitution der Begriffe „*elektrisches Feld, elektrische Feldstärke*". Im Raum zwischen geladenen Konduktoren finden wir, daß ein schwach geladenes „Probekügelchen" an jeder Stelle P eine nach Größe und Richtung bestimmte Kraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(P)$ erfährt; immer wieder dieselbe Kraft $\mathfrak{K}$, wenn ich das Kügelchen an dieselbe Raumstelle P zurückbringe. Verwende ich verschiedene Probekörper, so stellt sich heraus, daß die Kraft von ihm abhängt, jedoch so, daß man eine Faktorenspaltung vornehmen kann

$$\mathfrak{K}(P) = e \cdot \mathfrak{E}(P),$$

wo der vektorielle Faktor $\mathfrak{E}(P)$, die *elektrische Feldstärke* (außer vom Ort P) nur von den Konduktoren, nicht vom Zustand des Probekügelchens abhängt, während umgekehrt der skalare Faktor e, die *Ladung* des Probekörpers, nur durch dessen Zustand bedingt ist und sich als der gleiche erweist, in welche elektrischen Felder man ihn auch immer hineinbringt. Hier gehen wir von der Kraft als dem Gegebenen aus; die geschilderten Tatsachen aber führen uns dazu, ein durch die vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{E}(P)$ mathematisch beschriebenes elektrisches Feld anzunehmen, das die Konduktoren umgibt und *vorhanden ist, gleichgültig ob wir die von ihm ausgeübte Kraft an einem Probekügelchen konstatieren oder nicht*. Der Probekörper ist nur das Mittel, das Feld wahrnehmbar und meßbar zu machen. Die Gleichung $\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}$ tritt jetzt nicht mehr als Definition von $\mathfrak{E}$ auf, sondern ist ein (unter Umständen zu korrigierendes) Naturgesetz, welches die ponderomotorische Wirkung bestimmt, die ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ auf eine hineingebrachte Punktladung e ausübt. Da nach der *Maxwell*schen Theorie das Licht nichts anderes ist als ein periodisch veränderliches elektromagnetisches Feld von sehr kleiner Periode, so besitzen wir im *Auge* ein Sinnesorgan, mit Hilfe dessen wir gewisse elektrische Felder auch anders als durch ihre ponderomotorischen Wirkungen wahrnehmen. In der systematischen Darstellung wird man ohne jede Erklärung, rein „symbolisch" eine elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ einführen, die Gesetze hinstellen, welchen sie genügt (z. B.: das Linienintegral von $\mathfrak{E}$, über eine geschlossene Raumkurve erstreckt, ist $= 0$) und die Gesetze, nach denen mit ihr ponderomotorische Kräfte verknüpft sind. Betrachten wir die Kräfte als das direkt Nachweisbare, so ist damit dann der Anschluß an das Gegebene vollzogen.

Man kann sagen, daß die Physik erst in der allgemeinen Relativitätstheorie sich vollständig von Raum und Zeit der Anschauung als Konstruktionsmitteln der objektiven Welt frei gemacht hat; in dem von ihr entworfenen Schema (das übrigens alle früher vertretenen Standpunkte als Sonder- oder Grenzfälle einschließt) möge daher auch das *Verhältnis von Subjekt und Objekt* an einem typischen Fall erläutert werden. Es handle sich um die

Beobachtung zweier oder mehrerer Sterne; das auffassende Bewußtsein vereinfache ich zu einem *Punktauge*, dessen Weltlinie B heiße. Die Beobachtung finde statt im Momente O seines Lebens. Die Konstruktion ist auszuführen im vierdimensionalen Zahlenraum; nur um mich leichter verständlich zu machen, entwerfe ich eine geometrische Figur. Σ sind die Weltlinien zweier Sterne; auf dem von O ausstrahlenden rückwärtigen Lichtkegel $\mathfrak{K}$, der die beiden Sternlinien Σ in je einem Punkte trifft, verlaufen die Weltlinien Λ der Lichtsignale, die von den Sternen her in O eintreffen. Durch eine gewisse rein arithmetisch beschreibbare Konstruktion bestimmt sich daraus die Maßzahl ϑ des Winkels, unter welchem die Sterne dem Beobachter in O erscheinen. Diese Konstruktion ist „invariant“, d. h. von solcher Art, daß sie zu der gleichen Maßzahl ϑ führt, wenn sie, nach einer beliebigen Deformation des ganzen Bildes, von neuem gemäß der gleichen Vorschrift an dem verzerrten Bilde vorgenommen wird. Und in ihr ist alles enthalten: die Abhängigkeit des Winkels von den Sternen selber, von dem zwischen den Sternen und dem Beobachter sich ausbreitenden metrischen Feld, vom Ort des Beobachters in der Welt (räumliche Perspektive) und von seinem Bewegungszustand (es ergeben sich in O verschiedene Winkelwerte, je nach der Richtung der O passierenden Linie B; das ist die unter dem Namen der *Aberration* bekannte Geschwindigkeitsperspektive). Jene Winkel ϑ zwischen je zwei Sternen eines Sternbildes bestimmen die objektiv nicht zu beschreibende, sondern nur in der Anschauung zu erlebende visuelle *Gestalt* des Sternbildes, die erscheint unter der gleichfalls nicht objektiv zu fassenden Voraussetzung, daß *Ich* jenes Punktauge bin. Stimmen sie mit denen eines zweiten Sternbildes überein, so erscheinen beide Sternbilder

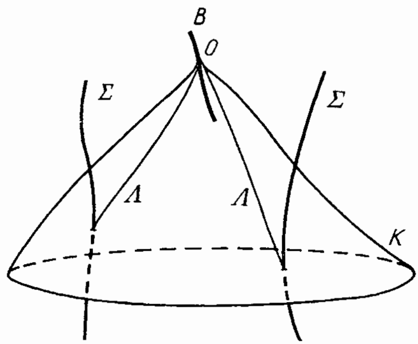


Fig. 3. Data, welche auf die Beobachtung des Winkelabstandes zweier Sterne von Einfluß sind.

im Momente O in der gleichen, sonst in verschiedener Gestalt. — Die objektive Welt *ist* schlechthin, sie *geschieht* nicht. Nur vor dem Blick des in der Weltlinie meines Leibes emporkriechenden Bewußtseins „lebt" ein Ausschnitt dieser Welt „auf" und zieht an ihm vorüber als räumliches, in zeitlicher Wandlung begriffenes Bild.

Bei der Konstruktion der Winkel ϑ spielt eine wichtige Rolle die in jedem Moment O für das Bewußtsein sich vollziehende „*Spaltung*" *der Welt in Raum und Zeit;* sie ist objektiv so zu beschreiben: Sind e_0, e_1, e_2, e_3 die Komponenten eines Vektors, der in O die Richtung von B angibt, so wird meine nächste räumliche Umgebung in O aufgespannt durch alle von O ausstrahlenden Linienelemente (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3), welche orthogonal zu e sind, d. h. der Gleichung

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} dx_i e_k = 0 \quad \text{mit} \quad g_{ik} = g_{ik}(0)$$

genügen.

So sind im objektiven Bestand alle Gründe enthalten, um den subjektiven Erscheinungen gerecht zu werden: keine Verschiedenheit im Erleben, der nicht eine Verschiedenheit im zugrunde liegenden objektiven Bestand korrespondierte (und zwar eine Verschiedenheit, die *invariant* ist gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen). Zu ihm gehört aber selbstverständlich der Leib des Ich als physisches Ding mit dazu. Das unmittelbar Erlebte ist *subjektiv und absolut*; wie nebelhaft es auch sein mag, in dieser seiner Nebelhaftigkeit ist es ein so und nicht anders Gegebenes. Die objektive Welt hingegen, mit der wir in unserm praktischen Leben beständig rechnen und welche die Naturwissenschaft rein herauszukristallisieren sucht — durch Methoden, welche die konsequente Fortbildung derjenigen Kriterien sind, nach denen sich uns, den in natürlicher Einstellung dahinlebenden Menschen, die Wirklichkeit konstituiert —, diese objektive Welt ist notwendig *relativ*; durch ein Bestimmtes (Zahlen oder andere Symbole) nur zu repräsentieren, nachdem in die Welt willkürlich ein Koordinatensystem hineingetragen ist. Dieses Gegensatzpaar: *subjektiv-absolut* und *objektiv-relativ* scheint mir eine der fundamentalsten erkenntnistheoretischen Einsichten zu enthalten, die man aus der

Naturforschung ablesen kann. Wer das Absolute will, muß die Subjektivität, die Ichbezogenheit, in Kauf nehmen; wen es zum Objektiven drängt, der kommt um das Relativitätsproblem nicht herum. Sehr schön und lebendig wird dieser Gedanke entwickelt in der Einleitung des oben zitierten Buches von *Born* über die Relativitätstheorie.

Innerhalb der Naturwissenschaft bezeichnen die weltanschaulichen Gegensätze von *Realismus und Idealismus* einander nicht widersprechende methodische Prinzipien. Wir konstruieren in ihr eine objektive Welt, welche zur Erklärung der Bewußtseinsgegebenheiten dem Grundprinzip genügen muß, das wir schon früher mit *Helmholtz* dahin formulierten (S. 43): *Eine Verschiedenheit der sich uns aufdrängenden Wahrnehmungen ist stets in einer Verschiedenheit der reellen Bedingungen fundiert. Lambert* spricht einen speziellen Fall davon in seiner Photometria (1760) als Axiom aus: „Eine Erscheinung ist dieselbe, sooft dasselbe Auge auf dieselbe Weise affiziert wird.“ Hier verfährt die Naturwissenschaft *realistisch*.

Denn solange ich bei dem schlechthin Gegebenen, genauer: dem schlechthin Gegebenen des Augenblicks stehen bleibe, ist offenbar kein Bedürfnis vorhanden, es durch eine objektive Welt zu unterbauen. Aber auch wenn ich Erinnerung hinzunehme und ihre Triftigkeit grundsätzlich anerkenne, wenn ich die Inhalte fremden Bewußtseins als den meinen gleichberechtigte Data akzeptiere, mich dem Geheimnis der intersubjektiven Verständigung öffnend und ihr Glauben beimessend, brauchte ich nicht so zu verfahren, wie wir wirklich tun, sondern könnte statt dessen nach den „Transformationen“ suchen, welche zwischen den Bildwelten verschiedener Bewußtseine vermitteln. Eine solche Darstellung wäre der *Leibniz*schen Monadologie angemessen. Statt von einem gegebenen Körper das perspektivische Bild zu konstruieren, das er von einem relativ zu ihm gegebenen Standort darbietet, und umgekehrt aus mehreren perspektivischen Aufnahmen, wie die Photogrammetrie tut, den Körper zu konstruieren, würde ich unter Ausschaltung des Körpers direkt die Aufgabe etwa so stellen: Wenn *A*, *B*, *C* drei an einen Punktleib gebundene Bewußtseine sind, die gesetzmäßigen geometrischen Zusammenhänge anzugeben, in denen die drei Bilder zueinander stehen, die je eine der drei Personen von demselben in ihrem Gesichtsfeld befindlichen Körper *K* und den Standorten der beiden andern Personen empfängt. Dies Verfahren wäre viel unübersichtlicher, ja es wäre undurchführbar wegen der Lückenhaftigkeit jedes einzelnen Bewußtseins im Vergleich zu der vollständigen realen Welt. Jedenfalls ist kein Zweifel, daß in dieser Hinsicht die Naturwissenschaft so verfährt, wie es der realistischen Einstellung entspricht.

Doch konzediert sie anderseits dem *Idealismus*, daß ihre objektive Wirklichkeit nicht gegeben, sondern *aufgegeben* ist und nicht absolut, sondern nur *relativ* zu einem willkürlich angenommenen Koordinatensystem und in bloßen *Symbolen* konstruiert werden kann. Vor allem kommt aber der Kerngedanke des Idealismus in der Umkehrung des obigen Grundsatzes zur Geltung: *das objektive Weltbild darf keine Verschiedenheiten zulassen, die nicht in Verschiedenheiten der Wahrnehmung sich kundgeben können;* ein prinzipiell der Wahrnehmung unzugängliches Sein wird nicht zugestanden. *Leibniz* sagt aus Anlaß der Fiktion einer absoluten Bewegung (Hauptschriften, hrsg. v. Cassirer I, S. 188): „Ich erwidere, daß die Bewegung zwar von der *Beobachtung*, aber keineswegs von der *Möglichkeit der Beobachtung überhaupt* unabhängig ist. Bewegung gibt es nur dort, wo eine der Beobachtung zugängliche Änderung stattfindet. Ist diese Veränderung durch keine Beobachtung feststellbar, so ist sie auch nicht vorhanden." Es ist zwar richtig, daß viele physikalisch verschiedene Farben genau die gleiche Empfindung des Rot hervorrufen. Schickt man aber alle diese Rots durch dasselbe Prisma, so gibt sich die physikalische Verschiedenheit auch in einer wahrnehmungsmäßigen Verschiedenheit des farbigen Lichtbüschels hinter dem Prisma kund; durch das Prisma wird sozusagen die verborgene Verschiedenheit für die Wahrnehmung aufgebrochen. Eine Verschiedenheit aber, die sich auf keine Weise für die Wahrnehmung aufbrechen läßt, ist ein Unding. Das ist ein sehr wichtiger methodischer Grundsatz der theoretischen Konstruktion.

Die Formel für das Maßfeld (Schwarzschild-Formel), welches eine Masse, z. B. die Sonne umgibt, läßt sich in der Form, wie sie gewöhnlich angegeben wird, wenn man die darin auftretenden Koordinaten als Abbildung des wirklichen Raumes auf einen euklidischen Bildraum deutet, so interpretieren: (I) In Wahrheit gilt die euklidische Geometrie; aber das um unser Massenzentrum O herum kugelsymmetrische Gravitationsfeld wirkt derart auf die starren Körper ein, daß ein in P radial gerichteter Maßstab eine Verkürzung im Verhältnis

$$\sqrt{1-\frac{2a}{r}}:1$$

erleidet (r die Entfernung OP, a eine durch die Masse bestimmte Konstante), während ein senkrecht zu OP angelegter Maßstab ungeändert bleibt. Warum sollen Maßstäbe, die durch *Erwärmung* ihre wahre Länge ändern, nicht in ähnlicher Weise auch auf ein *Gravitationsfeld* reagieren? Benutzt man aber ein gewisses anderes Koordinatensystem, so kommt man zu folgender Beschreibung: (II) In Wahrheit gilt die euklidische Geometrie; der Maßstab im Punkte P wird aber, welche Richtung er auch einnehmen mag, im Verhältnis

$$\left(1+\frac{a}{2r}\right)^2:1$$

durch das Gravitationsfeld geändert. Beide Beschreibungen drücken *denselben Sachverhalt* aus. Jedem möglichen Koordinatensystem entspricht eine besondere Korrekturvorschrift zur Rettung der euklidischen Geometrie. Aber die eine ist so gut wie die andere, jede führt in den nachprüfbaren Sachverhalt ein willkürliches Element ein, das gar keine durch die Wahrnehmung zu kontrollierende Folgen hat und daher ausgeschieden werden muß und auch ausgeschieden werden kann: indem man nämlich mit *Einstein* lediglich von der durch das Verhalten der Maßstäbe definierten *physischen Geometrie* Gebrauch macht, die freilich von der euklidischen abweicht. Die Theorie (I) oder (II) kann bei geeigneter Formulierung in zwei Teile gespalten werden: die Einsteinsche Theorie (E) und einen Zusatz (Z), der mit (E) nicht zusammenhängt und die Wirklichkeit nicht berührt, also abgestoßen werden muß; vgl. die schematische Figur. — An dem *Bohr*schen Modell des Wasserstoffatoms, in welchem die Periodizität des ausgesandten Lichts nichts zu tun hat mit der periodischen Umlaufszeit des Elektrons um den Atomkern, empfinden wir es, in so wunderbarer Weise es auch das Spektrum erklärt, als störenden Zug, der durchaus beseitigt werden muß, daß der Periode des Elektronenumlaufs kein Beobachtungsdatum

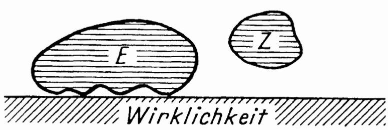


Fig. 4. Schematische Darstellung einer Theorie mit überflüssigem Bestandteil Z.

korrespondiert. — *Poincaré* macht einmal zur Erläuterung der Idee der Relativität die Fiktion, daß über Nacht, während alles Bewußtsein schläft, die ganze Welt mit allen in ihr enthaltenen Körpern einschließlich meines Leibes in einem bestimmten Verhältnis sich vergrößere; weder ich noch irgendein anderer würde davon nach dem Erwachen das Geringste merken. Diesem Geschehnis gegenüber macht die Naturwissenschaft mit dem Idealisten gemeinsame Sache; denn was soll unter solchen Umständen die Aussage, daß die Welt sich vergrößert habe, überhaupt noch bedeuten? *Nur da darf Verschiedenheit gesetzt werden, wo die Annahme der Gleichheit in Kollision kommt mit dem Grundsatz, daß Gleiches unter gleichen Bedingungen* (insbesondere gleicher objektiver Beschaffenheit, Stellung und Bewegung des Subjekts) *gleich wahrgenommen wird* (und mit dem Kausalsatz)[1]).

Zwischen der wirklichen Welt und dem Gegebenen besteht eine *Zuordnung*, eine Abbildung im mathematischen Sinne; doch steht dabei auf der einen Seite die eine quantitativ bestimmte objektive Welt, auf der andern Seite nicht allein das tatsächlich und augenblicklich Gegebene, sondern die *möglichen* (ev. erinnerten oder auf bestimmte Willensintentionen hin erwarteten) Wahrnehmungen eines Ich, und es gehen dann in die Zuordnung außer dem einmaligen objektiven Bestand der Welt noch die *möglichen* objektiven Zustände dieses wahrnehmenden Ich (Weltlinie des Leibes usw.) ein. *Helmholtz* stellt den Grundsatz „der empiristischen Ansicht“ auf (Physiolog. Optik, III, S. 433): „Die Sinnesempfindungen sind für unser Bewußtsein *Zeichen*, deren Bedeutung verstehen zu lernen, unserm Verstande überlassen ist.“ Man kann *Helmholtz* hierin, so wie er es meint, zustimmen und doch mit *Husserl* der Ansicht sein, daß das Raumding, das ich sehe, bei all seiner Transzendenz *Wahrgenommenes*, in seiner *Leibhaftigkeit* bewußtseinsmäßig Gegebenes ist (*Husserl*, Ideen zu einer reinen Phänomenologie, in seinem Jahrbuch für Philosophie, Bd. 1, 1913, S. 75 und 79), indem die Empfindungsdaten in der konkreten Einheit der Wahrnehmung durch „Auffassungen“ beseelt sind und in dieser Beseelung die „darstellende Funktion“ üben, bzw. in eins mit ihr das ausmachen, was wir „Erscheinen von“ Farbe, Gestalt usw. nennen. Ein Hund, der sich einem andern Hund nähert, sieht und beschnuppert einen „Mithund“, ein integriertes Ganzes, das mehr ist als ein ’Bündel von Sinnesempfindungen’. Hier

---

[1]) Dieser Grundsatz kann nicht als eine Definition der objektiven Gleichheit angesprochen werden, sondern nur als eine implizite Forderung, weil darin der Begriff der Gleichheit zweimal (*Gleiches* unter *gleichen* Bedingungen) auftritt.

wird lediglich eine jener Stufen geschildert, durch die hindurch sich die Konstitution der Außenwelt vollzieht. Und man darf dabei nicht leugnen wollen, daß die bestimmte Art, in der sich durch jene beseelenden Funktionen ein leibhaftes Ding vor mich hinstellt, gerichtet wird von einer Unsumme früherer *Erfahrungen*. Denn wie anders sollte man sie schildern als dadurch, daß „wir stets solche Objekte als im Gesichtsfelde vorhanden uns vorstellen, wie sie vorhanden sein müßten, um unter gewöhnlichen normalen Bedingungen des Gebrauchs unserer Augen denselben Eindruck ... hervorzubringen" (*Helmholtz*, Physiologische Optik, III, S. 4). Und als Wirklichkeitskriterien spielen sie gar keine Rolle. *Helmholtz* spricht hier von „unbewußten Schlüssen". Das klingt einigermaßen bedenklich, doch betont er ausdrücklich, sie seien nur in ihrem *Resultate* einem Schlusse, genauer einem Analogieschlusse gleich, obschon die zugrunde liegenden psychischen Akte wahrscheinlich von den bei bewußten Schlüssen vor sich gehenden ganz verschieden sind und ihr Effekt auch nicht durch bessere Einsicht aufgehoben werden kann. Der sinnliche Eindruck eines Spiegelbildes oder eines ins Wasser ragenden gebrochenen Stabes oder des Regenbogens täuscht natürlich nicht, erst das leibhafte Ding, das jener Eindruck nach *Husserl* vor mich hinstellt, ist ein Irrtum; das wahrhaft Vorhandene kann immer nur unter Berücksichtigung aller sinnlichen Zeichen ermittelt werden, welche in den angeführten Beispielen bald die obwaltenden „ungewöhnlichen" Bedingungen erkennen lassen. Man denke sich den Fall, daß die Wellenlängen desjenigen Lichtes, für welches unser Auge empfindlich ist, von der Größenordnung der Atomabstände in festen Körpern wären; wie schwer wären dann die optischen „Zeichen" (die *Laue*schen Röntgenogramme) für uns zu deuten! Bei der endgültigen Beschreibung des Zusammenhangs zwischen dem Gegebenen und der Wirklichkeit tut man demnach besser, alle Zwischenstufen der Konstitution zu ignorieren.

Und welche Bedeutung hat die nur in Symbolen darzustellende objektive Welt für das in lauter anschaulichen Gegebenheiten sich bewegende Leben des natürlich eingestellten Menschen? *Helmholtz* antwortet (a.a.O., S. 18): „Wenn wir jene Symbole richtig zu lesen gelernt haben, so sind wir imstande, mit ihrer Hilfe unsere Handlungen so einzurichten, daß dieselben den gewünschten Erfolg haben, d. h., daß die erwarteten neuen Sinnesempfindungen eintreten. Eine andere Vergleichung zwischen den Vorstellungen und den Dingen gibt es nicht nur in der Wirklichkeit nicht — darüber sind alle Schulen einig —, sondern eine andere Art der

Vergleichung ist gar nicht denkbar und hat gar keinen Sinn." „Eine solche Vorstellung von einem einzelnen individuellen Körper ist also in der Tat schon ein *Begriff*, welcher eine unendliche Anzahl von einzelnen in der Zeit aufeinander folgenden Anschauungen unter sich begreift, die alle aus ihm abgeleitet werden können. Die Vorstellung eines einzelnen individuellen Tisches, welche ich in mir trage, ist richtig und genau, wenn ich aus ihr richtig und genau herleiten kann, welche Empfindungen ich haben werde, wenn ich mein Auge und meine Hand in diese und jene bestimmte Stellung gegen den Tisch bringen werde. Welche andere Art der Ähnlichkeit zwischen einer solchen Vorstellung und dem dadurch vorgestellten Körper sein kann, weiß ich nicht zu begreifen." (A.a.O., § 26.) Im gleichen Sinne bemerkt *Leibniz* zu den Cartesischen Prinzipien (Philos. Schr. IV, S. 356): „Von den Sinnendingen können wir nichts anderes wissen, noch brauchen wir von ihnen etwas anderes zu verlangen, als daß sie unter sich, wie mit den unzweifelhaften Vernunftgründen übereinkommen und daß somit die Zukunft aus der Vergangenheit bis zu einem gewissen Grade vorausgesehen werden kann. Nach einer anderen Wahrheit oder Realität, als sie hierin verbürgt ist, in ihnen zu forschen, ist vergebens, — die Skeptiker dürfen nichts anderes fordern, die Dogmatiker nichts anderes verheißen." Oder *Husserl* (Ideen, S. 311 und 312): „Zum Wesen eines Dingnoëmas gehören ideale Möglichkeiten der Grenzenlosigkeit im Fortgange einstimmiger Anschauungen, und zwar nach typisch bestimmt vorgezeichneten Richtungen." Aber im Aufbau der Erfahrungswirklichkeit treten auch Unstimmigkeiten auf, die zu „Korrekturen" zwingen; darauf beruht der empirische Charakter der Wirklichkeitserkenntnis, die notwendig durch Irrtümer hindurchgeht. „Dingliche Existenz ist nie eine durch die Gegebenheiten als notwendig geforderte, sondern in gewisser Art immer zufällige (präsumptive Wirklichkeit). Das meint: immer kann es sein, daß der weitere Verlauf der Erfahrung das schon *mit erfahrungsmäßigem Recht Gesetzte* preiszugeben nötigt" (*Husserl*, Ideen, S. 86). Es bestünde durchaus die Möglichkeit, daß jeder Ansatz von Einstimmigkeit im Bildverlaufe der Wahrnehmungen unrettbar „explodierte"; dann würde sich durch ihren Abgleich nach Vernunftprinzipien keine wirkliche Welt konstituieren.

Die *Anforderungen*, die sich auf Grund unserer Erörterungen *für eine richtige Theorie des Weltablaufs* ergeben, lassen sich etwa so formulieren: 1. *Einstimmigkeit.* Der bestimmte Wert, welcher einer in der Theorie vorkommenden Größe in einem individuell bestimmten Fall zuzuschreiben ist, wird auf Grund der theoretisch gesetzten Verknüpfungen und der Berührung mit dem wahrnehmungsmäßig Gegebenen ermittelt. *Jede derartige Ermittlung muß zu dem gleichen Ergebnis führen.* So führen alle Bestimmungen der Elektronenladung e unter Benutzung der von den physikalischen Theorien aufgestellten Gesetze zusammen mit der Beobachtung zu dem gleichen Wert von e (innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Beobachtung). Besonders häufig werden miteinander verglichen eine (verhältnismäßig!) direkte Beobachtung der in Rede stehenden Größe (z. B. des Sternortes eines Kometen in einem gewissen Augenblick) und eine Berechnung auf Grund anderer Beobachtungen (z. B. der aus den beobachteten Sternörtern an vorangegangenen Tagen nach der Newtonschen Theorie berechnete Ort im gewünschten Augenblick). Die Forderung der Einstimmigkeit involviert die *Widerspruchslosigkeit*[1]), geht aber über sie hinaus, da sie die Theorie mit der Erfahrung in Kontakt bringt. 2. Es muß prinzipiell stets möglich sein, auf Grund anschaulicher Gegebenheiten den bestimmten Wert einer in der Theorie vorkommenden Größe in einem individuell bestimmten Falle zu ermitteln. Hierin spricht sich das Postulat aus, daß die Theorie *keine* zur Erklärung der Erscheinungen *überflüssigen Bestandteile* enthalten darf.

Hume hat mit unerbittlicher Konsequenz den Standpunkt festzuhalten versucht, das Gegebene sei die volle Wirklichkeit. Indem durch ihn deutlich wurde, wie vollständig dieser Standpunkt versagt zur Erklärung derjenigen Erkenntnispositionen, die in Leben und Wissenschaft eine grundlegende Rolle spielen, hat er das Realitätsproblem erst in seiner ganzen Schwere aufgezeigt. Die Wirklichkeit konstituierende Vernunft tritt bei ihm unter dem

---

[1]) Tatsächlich könnte in einer nicht-widerspruchsfreien Theorie die Formel $e = 2e$ bewiesen werden, und infolgedessen könnte für die Ladung des Elektrons sowohl der wirkliche Wert e als auch $2e$ aus einer solchen Theorie in Verbindung mit den Beobachtungsdaten abgeleitet werden.

Namen der *Einbildungskraft* auf. Mit voller Ehrlichkeit bekennt er den unheilbaren Zwiespalt zwischen Denken und Leben, in den er gerät. Sein Ansatz ist nicht minder undurchführbar wie die Begründung der Arithmetik als Lehre von den *in concreto* vorhandenen Zahlzeichen. Der Positivismus eines *Mach* und *Avenarius* scheint mir nur eine weniger folgerichtige Erneuerung des Humeschen Versuchs; denn bei ihnen spielen theoretische Setzungen, die *Hume* streng vermieden hatte, wieder eine beträchtliche Rolle. Damit sind wir aber schon mitten in der theoretischen Konstruktion drin, die dem Bestreben entspringt, *das Gegebene zur Totalität zu ergänzen*, und haben keinen Anlaß mehr, als ihr Baumaterial die sinnlichen Gegebenheiten zu verwenden. *Kants* transzendentaler Idealismus stellte die Einsichten wieder her, die schon *Leibniz* gewonnen; der Inhalt dieses Paragraphen kann als eine Erläuterung des Kantischen Begriffes von Wirklichkeit betrachtet werden als dessen, „was mit der Wahrnehmung nach Gesetzen zusammenhängt". Er geht über *Leibniz* hinaus durch Umwandlung der alten metaphysischen Seins-Begriffe von Substanz und Kausalität in *methodische Grundsätze* zum Aufbau der Erfahrungswirklichkeit.

Im logischen Teil hatten wir darauf bestanden, daß Existenz nicht von etwas Aufgewiesenem ausgesagt werden könne, daß das logische Symbol Σ_x einen Index x trägt, der sich auf eine Leerstelle bezieht. Dem scheint ein solches Urteil wie: Dieser Stuhl ist wirklich, zu widerstreiten. Aber die Behauptung realer Existenz enthält entweder, idealistisch gefaßt, eine Voraussage über eine Fülle möglicher einstimmiger Anschauungen, die sich auf gewisse Willensintentionen einstellen werden, oder, realistisch gefaßt, die Aussage, daß ein Ding x existiert, welches zu der gegebenen Stuhlerscheinung in einem gewissen metaphysischen Verhältnis steht.

Zum *Problem Realismus—Idealismus* gibt es in der Geometrie ein treffendes Analogon, das mit ihm insofern in sachlichem Zusammenhang steht, als für die objektive Welt das Koordinatensystem die Rolle des Ich für die subjektive übernimmt. Als „Dinge an sich" betrachten wir, wie in § 12, die Vektoren in einer Ebene, als „reales Subjekt" ein aus zwei voneinander linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ bestehendes Koordinatensystem. Ein Vektor $\mathfrak{x}$ läßt sich eindeutig in der Form $\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2$ darstellen, und das Zahlenpaar (x_1, x_2) der Komponenten werde als die „Erscheinung“ des „Dinges“ $\mathfrak{x}$ für das „Subjekt“ $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ gedeutet. Das „Gegebene“ sind hier *Zahlen*, und wir wollen jetzt annehmen, daß nur das Zahlenreich, nicht der geometrische Raum unserer Anschauung offen stünde. Wir können dann doch innerhalb der Algebra die ebene affine Vektorgeometrie aufbauen, ja die Entwicklung der Algebra selbst führt mit Notwendigkeit dazu. Man definiert nämlich: Unter Vektor soll ein beliebiges Zahlenpaar (x_1, x_2) verstanden werden. x_1, x_2 mögen die absoluten Komponenten desselben heißen. Zwei Zahlenpaare (x_1, x_2) und (x_1', x_2') werden addiert oder das erste wird mit einer Zahl a multipliziert, indem man das Paar $(x_1 + x_1', x_2 + x_2')$, bzw. (ax_1, ax_2) bildet. Sind

$$\mathfrak{e}_1 = (e_{11}, e_{12}), \qquad \mathfrak{e}_2 = (e_{21}, e_{22})$$

zwei Vektoren, für welche

$$\xi_1 \mathfrak{e}_1 + \xi_2 \mathfrak{e}_2 \tag{*}$$

nur dann $= (0, 0)$ ist, wenn die beiden Zahlen ξ_1, ξ_2 verschwinden, so läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in der Gestalt (*) eindeutig darstellen; ξ_1, ξ_2 mögen die *relativen* Komponenten von $\mathfrak{x}$ in bezug auf das System $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ heißen. Es gibt ein besonderes, das „absolute System“:

$$\mathfrak{e}_1 = (1, 0), \qquad \mathfrak{e}_2 = (0, 1),$$

in bezug auf welches die relativen mit den absoluten Komponenten zusammenfallen. Unter den möglichen Systemen, den „Subjekten“, die hier lediglich als arithmetische „Erscheinungen“ auftreten, ist so eines („Ich“) absolut ausgezeichnet. In gewissem Sinne kann man aber auch auf diesem algebraischen oder „konszientialistischen“ Standpunkt der Gleichberechtigung aller Subjekte gerecht werden. Hebt man nämlich diejenigen Operationen und Beziehungen als *objektiv* oder real hervor, die allein mittels der beiden Grundverknüpfungen definiert werden, welche $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ aus $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$, $a\mathfrak{x}$ aus a und $\mathfrak{x}$ entstehen lassen, so sind alle Systeme objektiv gleichberechtigt. Das (dem „reinen Bewußtsein“ angehörige) Verhältnis von $\mathfrak{x}$ zu seinen beiden absoluten Komponenten ist nicht objektiv, ist aber ein Sonderfall derjenigen realen Beziehung, welche zwischen dem „Ding“ $\mathfrak{x}$, dem „Subjekt“ $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ und der „Erscheinung“, den Komponenten ξ_1, ξ_2 von $\mathfrak{x}$ relativ zu $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ besteht. In der Algebra drückt man den „objektiven“ Standpunkt so aus: man studiere lediglich solche arithmetischen Operationen und Beziehungen, welche *invariant* sind gegenüber beliebigen linearen Transformationen. Ding, Subjekt und Erscheinung gehören hier alle der gleichen von objektiven Beziehungen durchwalteten Erscheinungswelt an. Reales Subjekt und Objekt, Ich, Du und Außenwelt entstehen sozusagen zusammen durch das Hineintragen des invariantentheoretischen Gesichtspunktes in die arithmetischen Erscheinungen, da sie korrelativ aufeinander sind. Unsere Analogie gibt in diesem Punkte *Leibniz* recht (vgl. z. B. Nouveaux Essais IV, c. 11) im Gegensatz zu *Descartes*, der durch sein *cogito, ergo sum* der Realität des Ich einen prinzipiellen Vorrang vor der Realität der Außenwelt zuerkannte. Die Analogie macht es gut verständlich, wieso das eine sinngebende Ich des reinen Bewußtseins bei objektiver Einstellung als einzelnes Subjekt unter Vielen seinesgleichen erscheinen kann.

Aber immer bleibt, trotz der *objektiven* Gleichberechtigung der verschiedenen Subjekte, *in Wahrheit* das absolute Subjekt, Ich, schlechterdings ausgezeichnet. Das entspricht ja auch nur dem Tatbestand, den ich vorfinde; rein erkenntnismäßig ist gegen den Konszentialismus nichts einzuwenden, er läßt sich vollständig durchführen. Dennoch ist von mir die Anerkennung des Du nicht nur so gefordert, daß ich mich im Denken einer abstrakten Norm, der „Objektivität", füge, sondern absolut: Du bist für dich noch einmal, was ich für mich: nicht *seiender*, sondern *bewußtseiender* Träger der Erscheinungswelt. Diesen Schritt können wir in unserer Analogie nur tun (da uns der Raum als anschauliche Gegebenheit nach Voraussetzung verschlossen sein sollte), wenn wir von dem *arithmetischen Modell* der affinen Vektorgeometrie zur *axiomatischen Beschreibung* übergehen, in welche die Begriffe des Vektors und der beiden Grundverknüpfungen undefiniert eintreten. Im axiomatischen System braucht die Gleichberechtigung aller Koordinaten nicht erst durch Abstraktion erzwungen zu werden, vielmehr ist in ihm ein einzelnes Vektorpaar nur durch individuellen Hinweis auszuzeichnen. Muster und Quelle jedes solchen Hinweises aber ist das Wort „*Ich*". So zeigt sich die Axiomatik wiederum (vgl. S. 82) als die Methode des geläuterten Realismus, der ein transzendentes Sein setzt, sich aber mit seiner Nachbildung im Symbol begnügt. — Die Setzung des Ich, Du und der Außenwelt ist ohne Einfluß auf die erkenntnismäßige Bearbeitung der Wirklichkeit, sie ist eine metaphysische Angelegenheit, nicht *Urteil*, sondern ein *Akt der Anerkennung* oder des *Glaubens* (man lese darüber *Fichtes* Schrift „Über die Bestimmung des Menschen"). Aber dieser Glaube ist doch die Seele alles Wissens. Vom metaphysisch-realistischen Standpunkt bleibt freilich die *Ichheit* ein Rätsel. *Leibniz* glaubt den Widerstreit von menschlicher Freiheit und göttlicher Prädestination dadurch zu lösen (Metaphysische Abhandlung, Philos. Schr.

IV, S. 454/455), daß er Gott unter den unendlich vielen Möglichkeiten (aus zureichenden Gründen) gewisse, z. B. die Wesen Judas und Petrus zum Dasein erwählen läßt, deren substantiale Natur ihr ganzes Schicksal bestimmt. Die Lösung mag objektiv zureichend sein, sie zerbricht aber vor dem Verzweiflungsschrei des Judas: Warum mußte *Ich* Judas sein! Die Unmöglichkeit einer objektiven Fassung dieser Frage leuchtet ein; darum kann auch keine Antwort in Form einer objektiven Erkenntnis erfolgen. Das Wissen vermag das Licht-Ich mit dem dunklen, irrenden, in ein individuelles Schicksal ausgestoßenen Menschen nicht zur Deckung zu bringen.

Die Setzung der realen Außenwelt garantiert nicht dafür, daß diese in der Vernunft sich aus den Erscheinungen durch die Einstimmigkeit schaffende Erkenntnisarbeit konstituiere; dazu ist vielmehr noch nötig, daß sie von einfachen Elementargesetzen durchwaltet sei. Die bloße Setzung der Außenwelt erklärt also eigentlich nicht, was sie doch erklären sollte, sondern die Frage nach ihrer Realität fließt untrennbar zusammen mit der nach dem *Grunde für die gesetzlich-mathematische Harmonie der Welt*. So liegt die letzte Antwort denn doch, jenseits des Wissens, allein in *Gott*, aus dem herfließend das Licht des Bewußtseins, dem der Ursprung selber verdeckt ist, in seiner Selbstdurchdringung sich ergreift, gespalten und gespannt zwischen Subjekt und Objekt, zwischen *Sinn* und *Sein*.

18. Das Raumproblem

a) Ursprung der Raumvorstellung

Mit genaueren Untersuchungen über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung hat man sich erst im 19. Jahrhundert beschäftigt. Die Sinnesgebiete, welche vor allem zur Konstitution der Raumvorstellung beitragen, sind die *Gesichts-* und *Tasteindrücke; Bain* fügte hinzu: die *Bewegungsempfindungen* und *Muskelgefühle*.

Das einzelne Auge sieht die Qualitäten in einem zweidimensionalen *Gesichtsfeld* ausgebreitet. Es ist zweidimensional, weil jede in ihm verlaufende eindimensionale Linie dasselbe zerschneidet. Es ist eine physiologische Grundtatsache, daß für die Stelle, an der wir einen Gesichtseindruck in diesem Felde lokalisieren, maßgebend ist die gereizte Netzhautstelle. Es besteht hier eine eineindeutige stetige „Abbildung“ im Sinne der Mathematik; die Feldstellen hängen in derselben Weise stetig miteinander zusammen wie die Netzhautstellen, denen sie korrespondieren.

J. Müller, der Urheber des Gesetzes von den spezifischen Sinnesenergien, sagt geradezu (Zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinnes, S. 54): „Die Netzhaut sieht in jedem Sehfelde nur sich selbst in ihrer räumlichen Ausdehnung im Zustande der Affektion; sie empfindet sich selbst in der größten Ruhe und Abgeschlossenheit des Auges räumlich dunkel.“ Es ist ein großer Fortschritt in *Helmholtz*' Physiologischer Optik, daß er nicht von *Identität*, sondern von *Korrespondenz* spricht. Dieselbe Bemerkung klärt das berühmte *Problem des Aufrechtsehens* vollständig (im objektiven Raum ist das Bild auf der Retina gegenüber dem abgebildeten Gegenstand um 180° gedreht). Steht auf der einen Seite der „objektive“, auf der andern mein Anschauungs-Raum und nehmen wir an, daß beide euklidisch-metrische Struktur tragen, so ist das Äußerste an „Treue“, was wir verlangen können, dies, daß die Korrespondenz zwischen objektivem Gegenstand und dem mir in der Anschauung vorschwebenden Bilde eine *isomorphe* (oder ähnliche) Abbildung im Sinne von § 4 sei, daß nämlich alle mit den metrischen Begriffen des objektiven Raumes zu beschreibenden geometrischen Beziehungen, die sich am Gegenstand finden, in den mit den gleichbenannten metrischen Begriffen des Anschauungsraumes beschriebenen geometrischen Beziehungen am Bilde sich widerspiegeln. Es ist aber unsinnig, Fragen zu stellen, die nur einen Sinn hätten, wenn beide, Gegenstand und Bild, im gleichen Raume stünden. — Das Gesichtsfeld hat in der Tat eine *metrische Struktur*, das ruhende Auge faßt unzweifelhaft so etwas wie *Gestalt* auf, die hier als eine Qualität des Gesehenen erscheint, und weiß Gestalten voneinander zu unterscheiden. Diese Gestalt ist aber weder dem gesehenen Gegenstand noch dem objektiven auf der Netzhaut entstehenden Bilde ähnlich (die Verzerrung gegenüber der von den Sehstrahlen gebildeten Figur wird in *Helmholtz*, Physiol. Optik III, S. 151 bis 153 beschrieben). Zu feinerer Ausbildung und teilweiser Korrektur gelangt diese Maßstruktur durch die Augen-*Bewegungen:* kann ich durch eine Blickwendung erreichen, daß sich das Bild I in das Bild II verwandelt (objektiv: daß dieselben Netzhautstellen vor der Bewegung von den Gesichtseindrücken I, nach der Bewegung von den Eindrücken II gereizt werden), so sind I und II zueinander kongruent. Für das Feld der Augenbewegungen ist hiernach Gestalt nicht mehr eine gegebene Qualität, sondern ein abstraktiv (vgl. § 2) aus der Beziehung der Kongruenz gewonnener *Begriff.*

Auf Grund seines psychologischen Grundsatzes: „daß als direkt Wahrnehmbares und von der Seele Unterscheidbares nur die Qualitäten der Empfindung gelten dürfen“ (Wagners Handwörterbuch d. Physiol.

III, Abt. 1, 1846, S. 183), und daß aus ihnen von der Seele die räumliche Ausdehnung als Vorstellungsinhalt neu aufgebaut werden muß, fordert *Lotze* die Existenz von „*Lokalzeichen*“: Empfindungen, deren qualitative Abstufungen den verschiedenen Stellen im Gesichtsfelde zugrunde liegen. Er hat sie näher als die Bewegungstendenzen, welche die betreffende Stelle in den Blickpunkt bringen würden, und die Augmuskelgefühle, welche eine solche Bewegung begleiten würden, zu fassen versucht. Aber dadurch wird das Fundierte zum Fundament gemacht; denn bereits das ruhende Auge hat unabhängig von den der nächsthöheren Konstitutionsstufe des Raums angehörigen Augenbewegungen sein kontinuierlich ausgebreitetes Gesichtsfeld. Einen Versuch von *Wundt*, Farbabschattungen zu Lokalzeichen zu stempeln, übergeht man besser mit Stillschweigen. *Helmholtz* gibt zu, obwohl er *Lotzes* These akzeptierte, daß die Lokalzeichen *qualitates occultae* seien. Bei der notwendigen Verbundenheit von Farbe und Ausdehnung im Gesichtsfeld entsteht aus jener These das Problem (*Poincaré*, Der Wert der Wissenschaft, 1910, S. 68), wie die einheitliche Empfindung sich in die beiden Momente Farbe und Ausdehnung spalten kann, inwiefern also zwei an verschiedenen Netzhautstellen *P*, *Q* zustande kommende Empfindungen desselben Rot eine innige Verwandtschaft zueinander besitzen, die ein Rot in *P* und ein Grün in *Q* nicht besitzen. Versteht man aber recht das Punktuelle einer einfachen Empfindung, so wird man wenig geneigt sein, das was Rot zu einem Ausgedehnten macht, wiederum als eine stetig sich abstufende Empfindung anzusetzen, sondern wird mit *Kant* und *Fichte* (Bestimmung des Menschen, Ausg. von Medicus, III, S. 326) anerkennen: „Ich bin ursprünglich nicht bloß empfindend, sondern auch *anschauend*“. Erst dadurch, daß das Kontinuum von Qualität ein (zeitliches oder raum-zeitliches) Kontinuum von Ausdehnung überdeckt, *ist* etwas für mich. Damit werden dann aber Empfindungen als Lokalzeichen überflüssig.

Wie steht es mit den Gesichtseindrücken von *Ruhe und Bewegung?* Lasse ich den Blick von oben nach unten gleiten, so habe ich den Eindruck, daß die Gegenstände ruhen, obschon ihre Bilder auf anderen und anderen Netzhautstellen entworfen werden. Dies gilt jedoch nur, wenn die Augenbewegung durch den Bewegungsapparat des Auges willentlich hervorgebracht wird; es kommt hier also nicht auf die mit der Augenbewegung verbundenen Muskelgefühle an, sondern auf die Willensintentionen. Sonach gibt es einen ursprünglichen Eindruck von Ruhe und Bewegung (Veränderung); und zwar *erscheint ein Gegenstand als ruhend, wenn sein Bild auf der Netzhaut sich nicht verschiebt und zu-*

gleich keine Augenbewegungen intendiert werden. Zwischen den Verschiebungen des Netzhautbildes und den auf Augenbewegungen gerichteten Willensintentionen aber besteht ein im einzelnen offenbar durch die Erfahrung fein ausgebildetes System von Kompensationen. Außerordentlich vereinfachend wirkt dabei der Umstand, daß die physiologisch mögliche Drehung des Auges bei festgehaltenem Blickpunkt dem Willen unmöglich ist, daß durch das „*Listing*sche Gesetz" zu jedem Blickpunkt (mit geringen Schwankungen) eine einzige Stellung des Auges gehört, wodurch sich die drei Freiheitsgrade des Augapfels für den Willen auf zwei reduzieren. Die Möglichkeit freier, dem Willen gehorchender Blickwendungen ist auch die Voraussetzung dafür, daß gewisse Veränderungen im Gesichtsfeld als Bewegungen „gedeutet" werden. — Der unmittelbare Eindruck der Ruhe darf nicht als „Zeugnis der Sinne" zur Widerlegung der physikalischen Relativitätstheorie angerufen werden. Denn die objektive „Erklärung" jenes Phänomens (die ja immer nur darin bestehen kann, im Objektiven Verschiedenheit nachzuweisen, wo sie im anschaulich Gegebenen vorliegt) benutzt, wie wir sahen, und zwar selbstverständlicherweise, allein die Idee der *relativen* Bewegung sich deckender physikalischer Wesen (Verschiebung des Bildes auf der Netzhaut) und den *dynamischen* Bewegungsbegriff (Willensintentionen, die durch Muskelkräfte den Augapfel zur Abweichung von seiner natürlichen, durch das Trägheitsfeld und seine Einbettung in den übrigen Leib bestimmten Bewegung zwingen). Das gleiche gilt auch für die Bewegungsempfindungen unseres Körpers: sie geben nicht Kunde von einer „absoluten Bewegung", sondern sind durchweg *Beschleunigungsempfindungen*, die das Herausgerissen-werden des Körpers oder eines Gliedes aus der natürlichen Trägheitsbewegung und die dadurch hervorgerufenen dynamischen Störungen anzeigen.

Die *optische Wahrnehmung der Tiefendimension ist*, wie *Wheatstone* durch das Stereoskop besonders schlagend zeigte, eng mit dem binokularen Sehen verbunden (außerdem sind die Gefühle der Akkommodationsanstrengung dafür von Bedeutung). Die Stellen im Gesichtsfelde des einen und des andern Auges stehen in einer eineindeutigen Korrespondenz, derart, daß *einfach* gesehen wird, was in beiden Gesichtsfeldern an korrespondierenden Stellen sich abbildet. Das stereoskopische Tiefensehen beruht auf der Verschiedenheit der beiden Bilder; sie besteht darin, daß die gleiche Farbqualität, insbesondere die gleiche Kontur nicht an korrespondierenden Stellen der beiden Gesichtsfelder erscheint. Im einzelnen bekämpfen sich hier eine namentlich von *Hering* vertretene „nativistische" Theorie — sie bürdet alle Leistung den Empfindungen auf, behauptet, daß die Reize korrespondierender Netzhautstellen, z. B. der Netzhautgruben, nur eine einfache Empfindung ergäben, und schreibt den Netzhautstellen neben den Lokalzeichen für Richtung noch einen in die Empfindung eingehenden Tiefenwert zu — und eine „empiristische" von *Helmholtz*, welche die optische Tiefendimension als eine Konstitutionsleistung betrachtet. Nur die letzte läßt sich ungezwungen mit den Tatsachen vereinigen; doch muß man im „nativistischen" Sinne allerdings hinzufügen, daß die Tiefendimension ein Neues, Ursprüngliches ist: mit seiner Hilfe konstituiert sich aus dem Material der beiden vorigen Stufen, dem zweidimensionalen reinen Sinnesfeld und dem Bewegungsfeld des Auges der *zentrierte dreidimensionale Raum*, in welchem der Leib des Ich seine Stelle findet, wenn auch noch die besonders ausgezeichnete Stelle des Zentrums. (Auf den beiden vorigen Stufen ist ein solches Leib-Ich, das sich in das Ausdehnungsfeld einbettet, offenbar noch nicht da.) Beim „Umspringen" der perspektivischen Deutung einer ebenen Figur (vgl. z. B. *Helmholtz*, Physiol. Optik III, S. 239) ist die „beseelende Funktion", welche die Figur im Gesichtsfeld zur Erscheinung eines vom Sehstrahl getroffenen Objektes im zentrierten Raum wandelt, besonders deutlich zu spüren. Auf dieser Stufe tritt auch die Verknüpfung mit dem Lokalisationsfeld des Tastsinnes und der Gliederbewegungen ein; auf das *Greifen* nach dem gesehenen Gegenstand muß man bei den einschlägigen gesichtspsychologischen Versuchen als Kontrolle beständig rekurrieren. *Husserl* betont, daß alle diese „angeblichen Faktizitäten, also Zufälligkeiten der Raumanschauung, die dem ‚wahren', dem ‚objektiven' Raum fremd sind, sich bis auf geringe empirische Besonderungen als Wesensnotwendigkeiten erweisen" (Ideen, S. 315), und *O. Becker* hat in seinem Sinne die konstitutiven Stufen der Räumlichkeit genauer phänomenologisch beschrieben.

Durch das Hineinschreiten in den Fernhorizont des zentrierten Raumes und die damit verknüpften Verschiebungen, durch das Gefühl der freien Möglichkeit der Körperbewegung und die zugehörigen Willensintentionen baut sich auf dem zentrierten der *homogene Raum* auf; erst hier wird der Leib zum gleichberechtigten Objekt neben den andern räumlichen Objekten und gewinnen wir die Möglichkeit, uns in den Standpunkt eines andern „hineinzuversetzen": erst dieser Raum kann als ein und derselbe gedacht werden für verschiedene Subjekte, er ist die Vorbedingung für den Aufbau der intersubjektiven Welt. Und die Feststellungen über die Orientierung der Gegenstände in ihm sind daher auch einer intersubjektiven Kontrolle und Korrektur fähig.

Berkeley hat entgegen der Lehre des Aristoteles, daß Raum ein *αἰσθητὸν κοινόν* sei, die Ansicht vertreten, daß es nur verschiedene Sinnesräume gebe. *Stumpf* (a.a.O. S. 287) wendet dagegen ein: „Sollen wir glauben, auch die *Dauer* einer Tastempfindung und die einer Gesichtsempfindung seien heterogene Inhalte?" *Berkeley* hat wohl darin recht, daß die präspatialen Lokalisationsfelder (der 1. und 2. Stufe) für Gesichts- und Tastsinn getrennt sind, während von der 3. Stufe ab nur der eine Raum in Frage steht, der die sinnlichen Tast- und Gesichts-Daten durchdringt. Dadurch wird der Raum zum verknüpfenden Band zwischen verschiedenen Sinnesgebieten. *Bains* Assoziationstheorie des Raumes will ihn in dieser Funktion erfassen; sie ist schärfer von *H. Poincaré* durchgeführt worden. Er scheidet (Wert der Wissenschaft, S. 72 bis 94) zunächst die Qualitätsänderungen von den Bewegungen dadurch, daß die letzteren durch eine in Willensintentionen und begleitenden Bewegungsempfindungen sich ausdrückende Bewegung des Ichleibs rückgängig gemacht werden können. Er versucht zweitens Kriterien aufzustellen für das Sich-Decken zweier Raumpunkte, die durch verschiedene Reihen von Bewegungsempfindungen und Willensintentionen erreicht wurden, und untersucht drittens die „Abbildung" der Räume verschiedener Sinnesorgane aufeinander (z. B. der 1. und 2. Fingerbeere, des Gesichtssinnes des linken Auges und des Tastsinnes des rechten Daumens), welche als Identifizierung gedeutet zu werden pflegt. Daß der Tastsinn nicht *in die Ferne reicht*, wohl aber der Gesichtssinn, besagt nach dieser Auffassung, daß die zu zwei sich deckenden Stellen im Raum eines Tastorgans gehörigen Stellen in dem Raume irgendeines anderen Sinnesorgans sich gleichfalls decken, hingegen sich nicht dekkenden Stellen im Tastfeld sich deckende im Gesichtsfeld korrespondieren können. *J. St. Mill* schloß sich *Bain* an, jedoch mit dem Unterschied, daß die Raumvorstellung für ihn nicht in den Bainschen Empfindungen und ihren Assoziationen besteht, sondern durch eine schöpferische Synthese („psychische Chemie") daraus hervorgeht. Alle diese Theorien ignorieren die unzweifelhaften Gegebenheiten auf den niedersten Konstitutionsstufen, die nicht Empfindungscharakter besitzen, wie das Nebeneinander im reinen Gesichtsfeld.

b) Das Wesen des Raumes

Die Durchdringung des *Dies* (Hier-jetzt) und des *So* ist die allgemeine Form des Bewußtseins; nur in der unauflösbaren Einheit von Anschauung und Empfindung, indem kontinuierliche Ausdehnung und kontinuierliche Qualität sich überdecken, *ist* etwas. Phänomenologisch wird man nicht darüber hinauskommen. Wenn man metaphysisch mit *Plato* das leidende Bewußtsein aus dem Zusammentreffen einer vom Ich und einer vom Objekt ausgehenden „Bewegung" hervorgehen läßt, so liegt es nahe, die Qualität auf Rechnung des Objekts, die Ausdehnung auf Rechnung des Ich zu setzen (und nicht umgekehrt, weil die Ausdehnung das qualitativ nicht differenzierte *Feld der freien Möglichkeiten* ist, die konkrete Vielfalt aber in den Qualitäten steckt). „Der erleuchtete, durchsichtige, durchgreifbare und durchdringliche Raum, das reinste Bild meines Wissens", heißt es bei *Fichte* (Ausg. v. Medicus, III, S. 325), „wird nicht gesehen, sondern *angeschaut, und in ihm wird mein Sehen selbst* angeschaut. Das Licht ist nicht außer mir, sondern in mir, und ich selbst bin das Licht." Wie aber diese einheitliche Kraft der Anschauung die Empfindungsdata sie beseelend durchdringt und ihre Leistungen sich dienstbar macht, das ist in weitgehendem Maße durch Erfahrung mitbedingt.

Die Gebundenheit beider Momente aneinander ist die Wurzel des Aristotelischen Satzes von der *Unmöglichkeit des leeren Raumes*. So wird er von *Hume* interpretiert (Treatise, Teil II), (wobei nur zu erinnern bleibt, daß die räumliche — oder besser, die raum-zeitliche Trennung ebenso gut ein unmittelbar feststellbares Faktum ist wie die raumzeitliche Berührung). Aber nur durch eine *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος* kann diese erkenntnistheoretische Wesenstatsache umgebogen werden zu einer Behauptung über das substantial-physikalische Geschehen; man kommt dann zu solchen Konsequenzen, wie sie *Descartes* zieht (während *Hume* sich darüber lustig macht), daß die Wände eines Kastens, wenn man ihn leerpumpte, sich berühren müßten. *Leibniz* leugnet das Leere hauptsächlich aus Gründen, die mit der Vollkommenheit der Welt und dem Satz vom zureichenden Grunde zusammenhängen. Er drückt jene Gebundenheit des Raumes an die Sinnesqualitäten dadurch aus, daß er ihn zusammen mit der Zeit als *Ordnung der Phänomene* bezeichnet. *Stumpf* (a.a.O., S. 15, 26) wendet dagegen ein: „Um die verschiedenen Ordnungen voneinander zu unterscheiden, müssen wir überall einen besonderen absoluten Inhalt anerkennen, in bezug auf welchen (?) die Ordnung stattfindet", und behauptet daher, „Raum bezeichne vielmehr jenen positiven absoluten Inhalt, worauf sich die Ordnung gründet". Er fordert, daß die Lagebeziehungen zwischen Raumpunkten in einer „Lage" der einzelnen Punkte für sich fundiert sein müssen, und versperrt sich durch dieses wohl von *F. Brentano* (Zur Lehre von Raum und Zeit, Kant-Stud. XXVI) übernommene logische Prinzip von der Unselbständigkeit der Relationen (vgl. § 1) das Verständnis für die Relativität des Orts.

Da das bloße Hier nichts für sich ist, das sich von irgendeinem andern Hier unterschiede, ist der Raum *principium individuationis;* er ermöglicht die Existenz numerisch verschiedener Dinge, die ihrem Wesen, ihrer Beschaffenheit nach einander gleich sind. Darum wird er von *Kant* der Materie der Erscheinungen, dem, „was der Empfindung korrespondiert", als *Form der Anschauung* gegenübergestellt; und eben hier liegt die Wurzel des *Kongruenzbegriffs*. *Leibniz* schließt daraus auf die Idealität von Raum und Zeit; denn sie verletzen das Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren, das er mit *Spinoza* im Gebiet der Substanzen als notwendig (und zwar als eine Konsequenz des Satzes vom zureichenden Grunde) postuliert.

In der Doppelnatur des Wirklichen ist es gegründet, daß wir ein theoretisches Bild des Seienden nur entwerfen können auf dem Hintergrund des *Möglichen*. So ist vor allem das vierdimensionale Kontinuum von Raum und Zeit das *Feld der apriori bestehenden Möglichkeiten von Koïnzidenzen*. Darum nennt *Leibniz* den „abstrakten Raum die Ordnung aller als möglich angenommenen Stellen" und fügt hinzu: „Demnach ist er etwas Ideales" (Hauptschr., hrg. v. Cassirer, I, S. 205).

Wenn wir die Entfernung der Sonne von der Erde in Metern angeben, so gewinnt diese Aussage nur einen im Gegebenen zu verifizierenden Sinn, wenn eine starre Stange, auf der durch Abtragen eines beweglichen starren Einheits-Maßstabes die einzelnen Meterabschnitte markiert sind, so auf die Erde gestützt wird, daß ihr Ende an die Sonne stößt. Die physikalisch sauberste Verwirklichung des starren Körpers ist der Kristall. Damit Koordinatenangaben einen an der Realität direkt abzulesenden Sinn haben, müßten wir uns die ganze Welt ausgefüllt denken mit einem Kristall. Wenn unter den Deckbewegungen des

Kristallgitters die Translationen durch ihre besonderen Eigentümlichkeiten hervorgehoben sind, läßt sich an seinen Atomen (durch wirkliche Ausführung jener Deckbewegungen!) die Koordinatennumerierung durch Zahlentripel durchführen, die dann zugleich zur Ortsbenennung im ganzen Raum Verwendung finden können. Aber jene starre Stange zwischen Erde und Sonne ist nicht vorhanden, ihre Ausmessung durch einen starren Meterstab wird nicht wirklich ausgeführt; ebensowenig existiert jener „Koordinatenkristall" und gehen dessen Deckbewegungen vor sich; ja sie dürfen auch nicht vorhanden sein, weil sie durch ihre realen Kräfte den Gang des Weltgeschehens beeinflussen würden. Von der in § 16 behandelten *Struktur* kann nur die *Möglichkeit* behauptet werden, sie aus Geschehnissen abzulesen, welche durch das freie Eingreifen des Experimentators herstellbar sind. Die geometrischen Angaben sind also lediglich ideelle Bestimmungen, die einzeln für sich eines im Gegebenen aufzuweisenden Sinnes ermangeln. Nur das ganze Netzwerk ideeller Bestimmungen berührt hier und da die erlebte Wirklichkeit, und an diesen Berührungsstellen muß es „stimmen". Das ist vielleicht, im allgemeinsten ausgedrückt, *die „geometrische Methode"*. „Man muß es nur gestehen, wer naturwissenschaftliche Fragen ohne Hilfe der Geometrie behandeln will, unternimmt etwas Unausführbares", meint *Galilei* (Dialogo, Opere I, S. 224). Feinde dieser Methode sind auf der einen Seite, weil ihnen die apriorische Konstruktion ein Dorn im Auge ist, die Empiristen, welche wähnen, das Sein einschichtig, ohne Zutat, „rein beschreibend" fassen zu können (*Bacon* contra *Galilei*, *Hume* contra *Kant*, *Mach* contra *Einstein*), auf der andern Seite aber, aus Haß gegen die Freiheit, gegen das ins Unendliche offene Feld der „geometrischen" Konstruktion, die Metaphysiker, welche eine starre dialektische Begriffswelt als das wahre Sein aufbauen (*Hegel* contra *Newton*). Von beiden Seiten her ist *Aristoteles* (contra *Archytas—Plato*) der große Anti-Mathematiker.

c) A priori oder a posteriori?

Der Glaube an *die Apriorität der geometrischen Erkenntnisse*, insbesondere der euklidischen Geometrie, ist in der älteren Zeit fest eingewurzelt. So heißt es bei *Kepler* (Brief an *Galilei*, Galilei, Opere V, S. 432): „Die Raumwissenschaft ist einzig und ewig und strahlt wieder aus dem Geiste Gottes. Daß die Menschen an ihr teil haben dürfen, ist mit einer der Gründe, weshalb der Mensch das Ebenbild Gottes ist." *Leibniz* hat versucht, die geometrischen als analytische Wahrheiten zu erweisen. *Kant* stellt im Hinblick auf die Geometrie das Problem der Kritik der reinen Vernunft: Wie sind synthetische Urteile *apriori* möglich? und glaubt durch seine Lehre, daß der Raum reine, nicht empirische Anschauung sei, diese Frage für die Geometrie beantwortet zu haben. „Da das, worin sich die Empfindungen allein ordnen und in gewisse Formen gestellt werden können, nicht selbst wiederum Empfindung sein kann, so ist uns zwar die Materie aller Erscheinung nur a posteriori gegeben, die Form derselben aber muß zu ihnen insgesamt im Gemüte a priori bereit liegen und daher abgesondert von aller Empfindung können betrachtet werden." „Also macht allein unsere Erklärung die Möglichkeit der Geometrie als einer synthetischen Erkenntnis a priori begreiflich." Die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie erschüttert die alte Gewißheit.

Schon *Proklus* hatte in seinem Euklid-Kommentar anläßlich des Parallelenaxioms gewarnt, die Berufung auf Evidenz zu mißbrauchen. *Gauß* schreibt an *Olbers* (1817, Werke VIII, S. 177): „Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, daß die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande, noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu anderen Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müßte man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern mit der Mechanik in gleichen Rang setzen." Oder 1830 an *Bessel* (ebenda, S. 201): „Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl *bloß* unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können".

Helmholtz zeigt, daß die beiden Teile der Kantischen Lehre vom Raum: 1. der Raum ist reine Form der Anschauung, 2. die Wissenschaft vom Raum, die euklidische Geometrie gilt a priori, nicht so eng miteinander verbunden sind, daß 2. aus 1. folgt. Er ist bereit, 1. als einen richtigen Ausdruck des Sachverhalts zu akzeptieren; doch könne daraus nicht mehr geschlossen werden, als daß alle Dinge der Außenwelt notwendig räumlich ausgedehnt seien. Im Einklang mit *Riemann* weist er den empirisch-physikalischen Sinn der Geometrie nach und beruft sich dabei auf *Newton*, der in der Einleitung zu den Principia erklärte: „Geometrie selbst hat ihre Begründung in mechanischer Praxis und ist in der Tat nichts anderes als derjenige Teil der gesamten Mechanik, welcher die Kunst des Messens genau feststellt und begründet." Bestünde neben der „physischen Gleichwertigkeit" von Raumgrößen (S. 135) eine in transzendentaler Anschauung unmittelbar gegebene Gleichheit, so könnte die Übereinstimmung der beiden Begriffe doch nur eine Erfahrungstatsache sein, im Konfliktsfalle aber würde die transzendentale Gleichheit „in den Rang einer Sinnestäuschung eines objektiv falschen Scheins herabgesetzt" (Wissensch. Abhdlg. II, S. 654). Gegen das Argument, daß die nicht-euklidische Geometrie keine Anschaulichkeit besitze, stellt er eine Definition des Anschaulichen auf: es sei dazu erforderlich, „die vollständige Vorstellbarkeit derjenigen Sinneseindrücke, welche das betreffende Objekt in uns nach den bekannten Gesetzen unserer Sinnesorgane unter allen denkbaren Bedingungen der Beobachtung erregen und wodurch es sich von anderen ähnlichen Objekten unterscheiden würde." Wir können auf die in § 17 gegebene Schilderung des Verhältnisses zwischen der objektiven Welt und ihrem subjektiven Bild verweisen, wie es das längs einer Weltlinie sich bewegende Punktauge auffaßt. Gegen das Argument, daß in eine versuchte experimentelle Prüfung der Geometrie immer auch eigentlich physikalische Aussagen über das Verhalten von starren Körpern und Lichtstrahlen hineinspielen, ist zu sagen, daß die physikalischen Gesetze so wenig wie die geometrischen, *jedes für sich*, eine Prüfung in der Erfahrung zulassen, sondern die „Wahrheit" einer konstruktiven Theorie nur im *Ganzen* geprüft werden kann.

Unter dem Einfluß der modernen mathematisch-axiomatischen Untersuchungen unterscheidet man zwischen dem „*mathematischen Raum*", dessen Gesetze logische Folgerungen aus den willkürlich angenommenen Axiomen sind, und dem „*physischen Raum*", dem Ordnungsschema der wirklichen Dinge, der als integrierender Bestandteil in die theoretische Weltkonstruktion eingeht. Manche Autoren stellen ihm noch den „*Anschauungsraum*" zur Seite. Im Hinblick auf jene Unterscheidung meint *Einstein* (Geometrie und Erfahrung, S. 3): „Soweit sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die

Wirklichkeit." Die allgemeine philosophische Entwicklung ist aber seither so verlaufen, daß sich *Kants* Urteile a priori in zwei Richtungen gespalten haben: auf der einen Seite in die „Wesensgesetze", welche Fundierungszusammenhänge zwischen den Gegebenheiten des Bewußtseins aussprechen, niemals aber den Anspruch erheben, eine Aussage über Tatsachen zu involvieren (diese Linie gipfelt in *Husserls* Phänomenologie; das a priori ist hier viel reicher als im Kantischen System); auf der andern Seite in die Prinzipien der theoretischen Konstruktion, deren Ansetzung nach dem extremsten Standpunkt *(Poincaré)* auf bloßer Konvention beruht.

Auf die allgemeine Mathematik der Kontinua und der wichtigsten Strukturen, mit denen sie behaftet sein können, brauchen wir hier nach dem im mathematischen Teil Gesagten nicht mehr näher einzugehen. Am physischen Raum kann man in einem gewissen objektiven Sinne, der nicht wie die Kantische Unterscheidung die Erkenntnisquelle und Erkenntnisart betrifft, Momenten a priori solche a posteriori entgegensetzen: nach dem *Riemann-Einstein*schen Standpunkt steht der einen absolut gegebenen euklidisch-pythagoreischen *Natur* der Metrik, die nicht teilhat an der unaufhebbaren Vagheit dessen, was eine veränderliche Stelle in einer kontinuierlichen Skala einnimmt, die gegenseitige *Orientierung* der Metriken in den verschiedenen Punkten gegenüber, der zufällige, von der Materie abhängige, wechselvolle, nur approximativ und unter Zuhilfenahme unmittelbarer anschaulicher Hinweise auf die Wirklichkeit zu gebende quantitative Verlauf des Maßfeldes. Daß etwas an der Struktur des extensiven Mediums der Außenwelt in diesem Sinne a priori ist, wird also von der allgemeinen Relativitätstheorie nicht schlechthin geleugnet, nur die Grenze zwischen dem a priori und dem a posteriori wird an eine andere Stelle verschoben. (Diese Gegenüberstellung oder Trennung ist, genau genommen, wie immer in ähnlichen Fällen, so zu verstehen, daß sich aus dem Ganzen das apriorische Moment abheben läßt, welches das Ganze nicht erschöpft; hingegen existiert kein rein aposteriorischer Rest, der übrigbliebe, wenn man vom Ganzen den ersten Teil „substrahiert".) Zum a priori der Welt gehören außer und vor der einen Natur des Maßfeldes noch ihre ein für allemal bestimmten *topologischen Zusammenhangs-*

verhältnisse, insbesondere die Dimensionszahl 4. Der quantitative Verlauf des Maßfeldes gehorcht exakten Naturgesetzen, den Einsteinschen Gravitationsgesetzen, die ähnlich gebaut sind wie die Maxwellschen Gesetze des elektromagnetischen Feldes. So hat man innerhalb des a posteriori noch einmal zu trennen zwischen der naturgesetzlichen Bindung und dem, was auch ihr gegenüber als frei, als zufällige Faktizität erscheint. An Stelle der zweigliedrigen tritt eine dreigliedrige Abstufung.

Erkennt man neben dem physischen einen *Anschauungsraum* an und behauptet von ihm, daß seine Maßstruktur aus Wesensgründen die euklidischen Gesetze erfülle, so steht dies mit der Physik nicht in Widerspruch, sofern sie an der euklidischen Beschaffenheit der *unendlich kleinen Umgebung* eines Punktes *O* (in dem sich das Ich momentan befindet) festhält: die Winkel, welche die Raumrichtungen der von den einzelnen Sternen her im Punktauge eintreffenden Lichtstrahlen für dasselbe bilden, genügen in der Tat den Gesetzen der sphärischen Trigonometrie im euklidischen Raum. Aber man muß dann zugeben, daß die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ichzentrum entfernt. Er ist einer Tangentenebene zu vergleichen, die im Punkte *O* an eine krumme Fläche, den physischen Raum, gelegt ist: in der unmittelbaren Umgebung von *O* decken sich beide, aber je weiter man sich von *O* entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eineindeutigen Korrespondenz zwischen Ebene und Fläche. Darum brauchte der Anschauungsraum als solcher nicht vagen Charakter zu tragen. Der Anschauungsraum überbrückt ja auch die durch das doppeläugige Sehen begründeten Diskrepanzen nicht durch einen schwankenden Kompromiß (solange nicht durch besonders extreme Umstände oder durch die Achtsamkeit auf die Gesichtswahrnehmungen als solche der „Wettstreit der Sehfelder" ausbricht), sondern ist anschaulich von ungetrübter Klarheit; obschon sich der Sachverhalt in der objektiven Konstruktion nur als ein Kompromiß darstellen läßt. Die Aussagen über den Anschauungsraum sind so wenig maßgebend für den physischen, wie etwa die Aussage, daß die gesehene Farbe Orange dem Gelb „näher" stehe als dem Blau, auf eine Metrik des Farbraumes mit exakten metrischen Gesetzen hinweist; besitzt doch der Farbraum, wie wir sahen, lediglich eine „projektive Struktur" (§ 12).

Für die apriorischen Elemente am Raum entsteht die Aufgabe, sie in ihrer Eigenart und Sonderstellung unter den allgemeineren

Möglichkeiten, welche die formalisierende Mathematik aufdeckt, aus Vernunftgründen zu begreifen. So gibt es drei verschiedene Möglichkeiten für die *Natur* einer vierdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit, je nachdem nämlich die metrische Fundamentalform 0, 1 oder 2 negative Dimensionen besitzt. Entspräche die Welt dem Falle 0, so würde überhaupt keine Wirkungsausbreitung von einem Weltpunkte O aus möglich sein, im Falle 2 aber wären Vergangenheit und Zukunft zu einem einzigen Weltgebiet verschmolzen. So kann man die Tatsache, daß für die Natur des Maßfeldes in der wirklichen Welt der mittlere Fall 1 zutrifft, mit der Notwendigkeit einer Kausalstruktur begründen, welche ein Ich handelnd und leidend mit der Welt zu verbinden gestattet in solcher Weise, daß Vergangenheit und Zukunft, Gewußtes und Gewolltes, sich trennen. Ebenso hat man von der n-dimensionalen euklidischen oder Riemannschen Geometrie her, die sich durch zwingende Formalisierung aus der dreidimensionalen ergab (§ 12), zu fragen, aus welchen inneren Gründen der wirkliche Raum gerade den Fall $n = 3$ realisiert. *Aristoteles* hat darauf einige Antworten gegeben, die noch ganz dem mythischen Denken angehören. *Galilei* bespricht und verwirft sie zu Anfang seines „Dialogs". Die Lösung, die er selber gibt, ist nur eine klarere Fassung des Problems, aber keine Antwort. Am aussichtsreichsten erscheint mir, daß die theoretische physikalische Konstruktion zu solchen Gründen führen wird[1]). So kann man mit Hilfe der sofort auf den n-dimensionalen Raum zu übertragenden Wellengleichung des Lichtes zeigen, daß nur in einem Raum *ungerader* Dimensionszahl beim Auslöschen einer Kerze um die Kerze herum (in einem Umkreis, dessen Radius mit Lichtgeschwindigkeit wächst) Dunkelheit eintritt; dadurch ist wenigstens ein wichtiger innerer, die Wirkungsausbreitung betreffender Unterschied zwischen *gerader* und *ungerader* Dimensionszahl statuiert. Nach einer von mir aufgestellten Theorie, die das elektrische Feld organisch mit dem Maßfeld verknüpft, können nur in einer *vierdimensiona-*

---

[1]) Es ist wirklich beschämend, mit was für naiven geometrischen Schnitzern immer und immer wieder die Lösung dieses tiefen Problemes versucht wird; so noch zuletzt in *Natorps* „Logische Grundlagen der exakten Wissenschaften", S. 303ff.

len Welt jene besonders einfachen und harmonischen Gesetze bestehen, die *Maxwell* für das elektrische Feld gewonnen hat. Dieses Prinzip der „Eichinvarianz“ gilt für keine andere Dimensionszahl.

Die Gruppenstruktur der euklidischen Drehungsgruppe (welche die metrische Natur der Welt auch nach *Riemann-Einstein* beherrscht) ist für die verschiedenen Dimensionszahlen grundsätzlich verschieden; man kann daraus entnehmen, daß die Gleichgültigkeit der mathematischen und physikalischen Gesetze gegen die Dimensionszahl in einer tieferen, heute freilich von der Physik noch kaum angeschnittenen Schicht aufhört. Die Hoffnung auf eine dereinstige zwingende Lösung unseres Problems von hier aus ist darum wohlberechtigt. — Einen Versuch, die Dreidimensionalität des Raumes aus seiner Funktion bei der Konstitution der Außenwelt für das Bewußtsein begreiflich zu machen, hat *Bolzano* unternommen (Abhdlg. d. Böhmischen Ges. d. Wissensch. 1843); er ist recht skurril ausgefallen. Aber auch ein neuerer Ansatz von *O. Becker* in der gleichen Richtung bleibt noch ganz unbefriedigend.

Ein Weg, die Pythagoreische Natur der Metrik, die in der euklidischen Drehungsgruppe zum Ausdruck kommt, gerade aus der Scheidung des a priori und a posteriori heraus zu verstehen, ist vom Verf. angegeben worden: nur im Falle dieser Gruppe nämlich bestimmt der an sich zufällige quantitative Verlauf des Maßfeldes unter allen Umständen, wie er sich auch im Rahmen der a priori feststehenden Natur desselben gestaltet haben möge, eindeutig die infinitesimale Parallelverschiebung, das drehungsfreie Fortschreiten von einem Punkte in die Welt hinein. Die Behauptung involviert einen tiefliegenden, der Gruppentheorie zugehörigen mathematischen Satz, dessen Beweis von mir erbracht wurde. Ich glaube, daß dieses so gelöste Raumproblem im Rahmen der *Riemann-Einstein*schen Theorie die gleiche Rolle spielt wie das *Helmholtz-Lie*sche (§ 14) für den starren euklidischen Raum. Vielleicht läßt sich das Postulat der eindeutigen Bestimmtheit des „gerade-Fortschreitens“ auch aus den Anforderungen, welche die phänomenologische Konstitution des Raumes stellt, rechtfertigen; *Becker* möchte nach wie vor die Bedeutung der euklidischen Drehungsgruppe für den Anschauungsraum auf das *Helmholtz*sche Postulat der freien Beweglichkeit gründen. Wenn in Übereinstimmung mit einer Bemerkung in § 15 die Transformationsgruppe Δ_0 in 3 oder 4 Dimensionen als Darstellung einer abstrakten Gruppe betrachtet wird, dann sollte auf die unterscheidenden Merkmale der Struktur dieser abstrakten Gruppe mehr Betonung als auf die spezielle konkrete Darstellung von Δ_0 gelegt werden.

LITERATUR

R. Descartes, Principia philosophiae.

G. Galilei, Il saggiatore.

T. Hobbes, De corpore.

G. W. Leibniz, Streitschriften zwischen Leibniz und Clarke.

J. Locke, An enquiry on human understanding.

D. Hume, Treatise on human nature.

I. Kant, Kritik der reinen Vernunft.

H. v. Helmholtz, Physiologische Optik, Bd. III.

—, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, in: Vorträge und Reden, 4. Aufl., 1896, Bd. II.

—, Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. Wissenschaftl. Abhdlg. II, S. 643.

E. Mach, Analyse der Empfindungen, 3. Aufl., Jena 1903.

E. Study, Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum. Braunschweig 1914.

M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre. Berlin 1918.

E. Husserl, Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Jahrbuch für Philosophie, Bd. 1.

O. Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, ebenda Bd. 6.

H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems. 1923.

R. Carnap, Der Raum. „Kant-Studien“, Ergänzungsheft Nr. 56, 1922.

R. Luneburg, Mathematical Analysis of Binocular Vision. Princeton University Press 1947.

II. Methodologie

19. Das Messen

Die im Gegensatz zur aristotelischen Philosophie in der Neuzeit sich durchsetzende Ansicht, daß ein Erkenntniszusammenhang in der wirklichen Welt nur gefunden werden kann, soweit qualitative Bestimmungen auf *quantitative* zurückgeführt werden, ist für die Naturwissenschaft von fundamentaler Wichtigkeit geworden. Wir finden sie bei *Kepler:* „*Ut oculus ad colores, auris ad sonos, ita mens hominis non ad quaevis sed ad quanta intelligenda condita est.*" Das Maß unserer Erkenntnis liegt in ihrer Annäherung an die „*nudae quantitates*". Und *Galilei* spricht explizite als seinen Grundsatz aus: „Alles messen, was meßbar ist, und versuchen meßbar zu machen, was es noch nicht ist." Eine glänzende Bewährung des zweiten Teils dieses Postulats ist seine Erfindung des Thermometers. — Worin besteht aber der Vorgang des Messens? Nehmen wir als Beispiel etwa die *träge Masse*!

Nach *Galilei* schreibt man zwei Körpern die *gleiche* träge Masse zu, wenn keiner den andern überrennt, falls man sie mit gleichen Geschwindigkeiten gegeneinander jagt (sie mögen beim Zusammenstoß aneinander kleben bleiben). Hier handelt es sich also um eine *Definition durch Abstraktion.* Die physikalisch definierte Massengleichheit ist, wie an der Erfahrung geprüft werden muß, eine Beziehung vom Charakter der Gleichheit (§ 2). Außerdem ist durch das Experiment festzustellen, daß sie von den Nebenumständen des definierenden Prozesses, nämlich der Geschwindigkeit des Zusammenstoßes unabhängig ist. Mit der *Gleichheit,* dieser ersten Erfordernis des Messens, ist meistens ohne weiteres die Beziehung des *größer und kleiner* gegeben: von den beiden Körpern hat derjenige die größere Masse, welcher den anderen bei gleicher Geschwindigkeit überrennt. Endlich aber muß ein Prozeß der *Addition* gegeben sein; er besteht im Falle der Massen einfach im Zusammenfügen der Körper. Unter Voraussetzung gewisser Axiome über diese Grundbegriffe, die z. B. *Helmholtz* in seinem wiederholt zitierten Aufsatz „Zählen und Messen" bespricht, läßt sich auf sie eine Maßskala gründen, die jeden Wert der in Frage stehenden Größe durch eine *Zahl* charakterisiert. Es kann dabei nötig sein, eine bestimmte *Maßeinheit* willkürlich zu fixieren (hierin liegt dann ein neues Moment der Relativität, und so verhält es sich z. B. bei den Strecken und Massen); unter Umständen existiert aber auch eine natürliche Maßeinheit, wie es die Volldrehung im Gebiete der Winkel ist. Praktisch ist an die Einheit die Forderung zu stellen, daß sie überall und zu allen Zeiten möglichst exakt reproduzierbar sei.

Eine andere Art von Größen als die eben besprochenen „addierbaren" treten als absolute oder Materialkonstanten in den Naturgesetzen auf, welche funktionale Abhängigkeiten zwischen addierbaren Größen statuieren. Dahin gehört z. B. der Brechungsindex n, dessen Bedeutung durch das *Snelliussche* Brechungsgesetz klargelegt wird: Sinus des Einfallswinkels gleich n-mal dem Sinus des Brechungswinkels (die in diesem Gesetz verbundenen addierbaren Größen sind die beiden Winkel). *Helmholtz* nennt solche Konstante *„intensive" Größen* im Gegensatz zu den addierbaren, den *„quantitativen" Größen;* intensive Größen sind insbesondere alle Wertbestimmungen von Eigenschaften.

Ein gutes Beispiel ist die *Temperaturmessung*. Gleiche Temperatur haben solche Körper, welche im Zustande der Berührung aneinander keine Veränderung hervorbringen. Es ist eine durchaus nicht selbstverständliche, sondern aus der Erfahrung zu entnehmende Tatsache, daß, wenn A mit B und B mit C gleiche Temperatur besitzt, auch A und C gleiche Temperatur haben. Eine Addition, die zu einer bestimmten Meßskala führen würde, gibt es im Gebiete der Temperaturen nicht. Auf Grund der Erfahrung, daß Körper ungleicher Temperatur aneinander Längenänderungen hervorbringen, half man sich dadurch, daß man die Temperatur durch die Länge eines mit dem zu messenden Körper in Berührung gebrachten Normalkörpers bestimmte. Diese Festlegung der Temperatur ist stets reproduzierbar und unabhängig von der Vorgeschichte, während der Temperatursinn uns einen Körper von physikalisch konstanter Temperatur bald warm, bald kalt empfinden läßt, je nachdem welchen Wärmegraden unsere Haut unmittelbar vorher ausgesetzt war. Auch fühlen sich Holz und Eisen gleicher Temperatur verschieden an: wenn warm, so Eisen wärmer; wenn kalt, so Eisen kälter; die äußere Wärmeleitfähigkeit ist dafür physikalisch mitbestimmend. Der objektive Temperaturbegriff entfernt sich also ziemlich weit von den Gegebenheiten des Wärmesinns. Die Temperaturskala ist von dem gewählten Normalkörper abhängig; jedoch verhalten sich wenigstens alle Gase annähernd gleich; ihr Verhalten kann mit geringen Fehlern durch ein einfaches Gesetz beschrieben werden, das man nun als charakteristisch für ein „ideales Gas" ansetzt. Aber erst dadurch, daß aus diesem Gesetz des idealen Gases unter Zuhilfenahme eines allgemeinen Prinzips der sog. zweite Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitet wurde, der für alle Körper gilt, wurde es möglich, die Skala des idealen Gasthermometers zu realisieren. Die *absolute Temperatur* ist danach, außer durch die Aussage, daß Körper gleicher Temperatur denselben Temperaturwert T haben, dadurch gekennzeichnet, daß für jeden unendlich langsam verlaufenden Kreisprozeß das Integral über dQ/T null wird, wo dQ die in den einzelnen unendlich kleinen Schritten des Kreisprozesses zugeführte energetisch gemessene Wärmemenge, T jeweils die im betreffenden Augenblick herrschende Temperatur bedeutet (*W. Thomson* 1848). Die Wärmemenge ist eine addierbare, die Temperatur also im Helmholtzschen Sinne eine intensive Größe. Ihre Definition ist eine implizite, welche die Geltung gewisser Naturgesetze mit einschließt; sie läßt nur noch die Maßeinheit, nicht aber den Nullpunkt willkürlich. Vielmehr ist T notwendig stets positiv, es gibt einen *absoluten Nullpunkt* der Temperatur (bei der üblichen Wahl der Maßeinheit liegen Gefrier- und Siedepunkt des Wassers unter Atmosphärendruck bei 273^0, bzw. 373^0 der absoluten thermodynamischen Skala).

Auf der Relativität der Größenbestimmungen in bezug auf eine willkürlich zu wählende Maßeinheit beruhen die Gesetze der „*mechanischen Ähnlichkeit*", über die *Galilei* am zweiten Tag seiner Discorsi spricht. Sie erlauben z. B. an kleinen Modellen über die wirklichen Geschehnisse Auskunft zu erhalten, wie man an einem kleinen Modell eines Dreiecks, dessen Winkel bekannt sind, die Seitenverhältnisse ablesen kann. Spielt bei einem Schwimm- oder Flug-Problem die Reibung des Mittels (Wasser oder Luft) eine Rolle, so muß man beim Übergang zum Modell im allgemeinen auch das Medium durch ein solches von entsprechend geänderter Zähigkeit ersetzen. Freilich haben die physikalischen Ähnlichkeitssätze ihre Grenzen. So bleibt nach dem Ansatz der speziellen Relativitätstheorie nur eine willkürliche Längeneinheit für Raum und Zeit übrig, die Lichtgeschwindigkeit c wird zur absoluten Geschwindigkeitsnorm. Freilich ist die Existenz einer absoluten Einheit für die Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie nicht absonderlicher als die Existenz einer absoluten Winkeleinheit in der Geometrie.

Sie ist lediglich eine Konsequenz aus der metrischen Struktur der vierdimensionalen Welt. Wird die Gravitationskonstante hinzugefügt, so bleibt für alles physikalische Messen nur noch eine Einheit, die willkürlich gewählt werden muß, etwa die Sekunde als Zeiteinheit. So weit kann man ohne Berücksichtigung der atomistischen Struktur der Materie gelangen. Über die Atomtheorie und die aus den Atomgesetzen zu gewinnenden absoluten Naturkonstanten s. § 22 e (S. 234) und Anhang F.

Zur Theorie des Messens gehört die Frage, wie es *möglich ist, Größen viel genauer festzulegen, als ihre unmittelbare sinnliche Unterscheidbarkeit zuläßt*. Was für einen Sinn hat es, zwei Gelbnuancen (etwa die Gelbs der beiden benachbarten D-Linien im Natriumspektrum) zu unterscheiden, die sinnlich ununterscheidbar sind? Ein einfaches Beispiel dafür ist die genaue Bestimmung der Zeitdauer einer Pendelschwingung; man wartet etwa 1000 Pendelschwingungen ab und dividiert die gesamte Zeit durch 1000. Die Genauigkeit ist dadurch auf das Tausendfache derjenigen gestiegen, die bei Beobachtung einer einzigen Schwingung zu erzielen wäre. Dabei ist freilich eine theoretische Voraussetzung gemacht: nämlich die, daß alle einzelnen Schwingungen gleiche Zeitdauer besitzen. Aber ebenso wie die auf indirektem Wege gewonnene Behauptung über die Zeitdauer der einzelnen Schwingung ist auch diese Voraussetzung für den Intuitionisten, der die Grenze der sinnlichen Genauigkeit respektiert und sie nicht ums Tausendfache überschreiten will, „sinnlos“. Dennoch kann man sie in gewisser Weise durch die Konstatierung bestätigen, daß die Zeitdauer von m aufeinander folgenden Schwingungen sich zu der von n Schwingungen (m und n große ganze Zahlen) so verhält wie $m:n$, natürlich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der direkten Beobachtung (die Prüfung wird an mehreren beliebig herausgegriffenen Schwingungsserien vollzogen). Allgemein steht es hier so: Durch die exakten Gesetze der zugrunde gelegten Theorie steht die zu bestimmende Größe x mit manchen anderen in funktionalen Abhängigkeiten. Durch ihre Beobachtung können Schlüsse auf den Wert von x gezogen werden, die x genauer zu ermitteln gestatten als durch seine direkte Beobachtung. Die Bewährung der zugrunde gelegten Theorien besteht darin, daß innerhalb der zu erwartenden Fehlergrenzen alle indirekten Methoden der Bestimmung von x zum gleichen Resultat führen. Insbesondere bestimmt sich eine Tatsache um so genauer, je weiter ihre kausalen Folgen in der Zeit sich entwickeln. Eine zunächst gar nicht merkbare Richtungsverschiedenheit zweier Geschosse führt schließlich zu den deutlichsten Unterschieden: das eine trifft, das andere nicht. Es ist aber daran festzuhalten, daß jede solche indirekte Wertbestimmung, jede Setzung eines sinnlich nicht vorhandenen Unterschiedes nur auf Grund von *Theorien* möglich ist, deren Verifikation dadurch geschieht, daß sie in allen ihren numerischen Konsequenzen geprüft werden und Einstimmigkeit ergeben. (Andernfalls zwingt die Beobachtung zur Modifikation der Theorie.)

Die ganze indirekte Methodik der Experimentalphysik gehört hierher, von den einfachsten Hilfsmitteln angefangen, dem Nonius, den Spiegelreflexen zur Messung kleiner Ausschläge, den rotierenden Spiegeln, mit Hilfe deren man die tonerzeugenden Schwingungen leuchtender Körper auflöst, dem Mikroskop, bis zum Raffinement der modernen, der Atomforschung dienenden Versuchsanordnungen, die dazu vordringen, das einzelne Atom (oder α-Teilchen) isoliert durch seine Wirkung „sichtbar zu machen". Eine interessante Übersicht und einen Versuch zur Ordnung der verschiedenen dabei angewandten methodischen Prinzipien gibt *Mach* in dem Kapitel „Das physische Experiment und seine Leitmotive" in „Erkenntnis und Irrtum" (1905). Hier liegt ein Hauptbetätigungsfeld für die Erfindungskraft des Experimentalforschers.

Wenn sich so auch die Ansicht rechtfertigen läßt, daß *die Welt viel bestimmter ist, als sie den Sinnen erscheint*, ja daß sie absolut bestimmt ist, so wäre diese absolute Bestimmtheit irgendeines von mir selber leibhaftig miterlebten Weltstücks doch nur zu gewinnen, wenn ich die Fortentwicklung bis ans Ende aller Zeiten (zusamt der Vollendung der die exakten Gesetze liefernden theoretischen Physik) abwartete; sie ist also eine *Grenzidee* und durchaus keine Gegebenheit. *Leibnizens* Gedanke der prästabilierten Harmonie — den er selber durch das Beispiel zweier voneinander unabhängiger Uhren illustriert, die nicht darum immer gleich gehen, weil sie aufeinander gleichrichtende Einflüsse ausüben, sondern weil sie genau gleich gebaut sind — widerstreitet daher dem Wesen des Kontinuums. *Hume* setzt im Treatise auseinander, daß die Verschärfung der Maßangaben auf einer gegenseitigen und fortlaufenden Berichtigung beruhe, „der Begriff der Berichtigung über das hinaus, was wir mit Instrumenten und künstlichen Mitteln erreichen können", der absolut genaue Maßstab aber „eine bloße Fiktion" sei, „ebenso nutzlos als unverständlich" (Teil II, Abschnitt 4). Dennoch versteht man in diesem Zusammenhange auch die *Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit einer exakten Mathematik:* die exakte Theorie bildet das Gerüst für die approximativen Verifikationen. Legen wir z. B. die euklidische Geometrie als Raumtheorie zugrunde, so sind wir mit dem Satz, daß die Diagonale zur Seite des Quadrats sich verhalte wie $\sqrt{2}:1$, für alle Zukunft gerüstet, gegenüber allen weiteren Verschärfungen der direkten und indirekten Messungsmethoden; er führt uns zu immer neuen Voraussagen (approximativen Charakters) oder zu immer feineren Kriterien für die Meßkörper, welche den idealen Voraussetzungen der euklidischen Geometrie mit der jeweiligen Genauigkeit entsprechen sollen, die überhaupt der Längenmessung gegeben werden kann.

Neuerdings ist der dänische Geometer *Hjelmslev* für eine reine Approximationsgeometrie eingetreten (Abhdlg. aus dem Mathem. Seminar d. Univ. Hamburg, Bd. 2, S. I), mit den gleichen Argumenten wie *Hume*, der u. a. bemerkte, daß die Gewißheit, „zwei gerade Linien könnten keine Strecke miteinander gemein haben, immer eine deutlich wahrnehmbare Neigung der beiden Linien gegeneinander voraussetze, daß dagegen, wenn der Winkel, den sie bilden, sehr klein ist, uns das Musterbild einer geraden Linie fehlt, das genau genug wäre, um uns die Wahrheit des Satzes mit Sicherheit erkennen zu lassen" (Treatise, Teil III, Abschn. 1). Aber wenn *Hjelmslev* dann den Pythagoreischen Lehrsatz formuliert: „In einem rechtwinkeligen Dreieck lassen sich die Seiten so durch Zahlen fixieren, daß das Quadrat der Hypotenusenzahl der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich wird", so zeigt sich bereits hier der Gedanke, durch die für unverletzlich erklärte, zum exakten Gesetz erhobene Funktionalverknüpfung, die der gewöhnliche Pythagoreische Lehrsatz ausspricht, den Spielraum der Unsicherheit für die unmittelbar abzulesenden Maßzahlen zu verringern. Denkt man nun weiter daran, daß dieselbe Strecke, die hier als Hypotenuse auftritt, noch in unendlichvielen anderen Figuren als Bestandstück fungieren kann, mit deren übrigen Teilen sie durch analoge Funktionalbeziehungen verknüpft ist, so kommt man genau zu der Auffassung vom Sinn einer exakten Theorie, welche die konstruktive Physik beherrscht. *Hjelmslev* hat übrigens viel zu sehr nur die gezeichneten Figuren an der Wandtafel im Auge und vergißt viel zu sehr, daß die Geometrie zugleich ein ideelles Fundament abgeben soll für Astronomie und Atomphysik. Konstruktive Wissenschaft kann sich den *Brouwer*schen Intuitionismus gefallen lassen, der *Hume-Hjelmslev*sche Sensualismus, der prinzipiell das unmittelbar Gegebene, ohne es doch durchführen zu können, zum allein Wirklichen machen will, ist tödlich für sie.

Das Messen, wie wir es bisher betrachteten, beruhte darauf, daß in vielen Fällen physikalische Größen jene bestimmten Axiomen genügenden Begriffe der Gleichheit und der Addition darbieten, welche ihre Werte auf eine Zahlenskala projizieren. „Auf diese Art", sagt *Maxwell* (Scient. Pap. Vol. 1, S. 156), „sind alle Anwendungen der Mathematik in der Wissenschaft auf Beziehungen zwischen den Gesetzen der physikalischen Größen zu denen der ganzen Zahlen gegründet." Wie wichtig die besprochene besondere Art der Einführung von Zahlsymbolen in die Naturwissenschaft auch sein mag, so darf ihr dennoch, wie es scheint, keine prinzipiell ausgezeichnete Rolle zugeschrieben werden. Wenn man in einem Kontinuum die Grundlage für eine arithmetische Unterscheidung der einzelnen Stellen dadurch schafft, daß man ein Teilungsnetz über das Kontinuum spannt, das in allen seinen Stufen der Verschärfung und Verfeinerung in weitem Maße frei, wenn auch nach festem kombinatorischen Schema zu wählen ist, so verfährt man anders, viel ungebundener als im Falle des eigentlichen Messens. Und die Messung vieler physikalischer Zustandsgrößen (die nicht Skalare, sondern Vektoren oder „Tensoren" sind wie z. B. das metrische Feld) ist erst relativ zu einem so willkürlich in die Welt hineingetragenen Koordinatensystem möglich. Jenes freie Hineintragen der Koordinaten und dieses auf der Addition gleicher Elemente beruhende Messen mögen typisch sein für die Substrate, auf welche die beiden Methoden Anwendung finden: die erste auf die *Form*, die zweite auf den *Inhalt* der Welt. Worauf es beim Messen aber eigentlich ankommt, ist doch allein die *symbolische Darstellung*; auch die Zahlen sind nicht die einzigen brauchbaren Symbole. Ein wesentlicher und allgemeiner Zug des Messens ist es ferner, daß es (relativ zu den angenommenen Meßfundamenten) die Dinge *auf begriffliche Weise*, symbolisch, zu geben gestattet. Ist ein Stück der unendlichen euklidischen Ebene materiell durch eine ebene Metallplatte realisiert, so können wir zunächst nur im Bereich der Platte Örter festlegen durch Anbringung qualitativ unterschiedener, immer wieder erkennbarer materieller Marken auf der Platte. Wenn aber ein rechtwinkliges Achsenkreuz mitsamt einer Einheitsstrecke in sie eingeritzt ist, so können wir nicht nur („ideell" und auf Grund einer Theorie über das Verhalten starrer Maßstäbe) ein beliebig feinmaschiges Netz wohlcharakterisierter Örter durch Koordinatenangaben über sie ausbreiten; sondern diese indirekte Methode gestattet uns sogar, die Grenzen der materiellen Basis zu überschreiten und solche „Zahlmarken" auch in die jenseits der materiellen Insel sich erstreckende leere Ebene hinauszusetzen. So benutzen wir die Erde als Meßbasis für den astronomischen Raum. — Endlich zeigt sich im Messen das Bestreben, die unmittelbaren sinnlichen Feststellungen, die natürlich nie ausgeschaltet werden können, wenn irgend möglich auf die allersicherste und genaueste unter ihnen zurückzuführen, nämlich auf die *Feststellung raumzeitlicher Koinzidenzen* (man sucht also z. B. den subjektiven Vergleich von Farben und Helligkeiten auszuschalten). Jede Messung soll schließlich darauf hinauslaufen, daß eine Marke auf einer Skala (ein beweglicher Zeiger o. dgl.) mit einer bestimmten Marke auf einer zweiten Skala koinzidiert. Bei einer astronomischen Beobachtung geschieht die Ablesung am Teilkreis auf solche Weise, während die Einstellung des Instruments auf den Stern eine durch Zwischenschaltung des Lichtes modifizierte Koinzidenz benutzt: die Deckung von Stern und Fadenkreuz.

20. Die Begriffsbildung

Dilthey schildert in dem Aufsatz über „die Autonomie des Denkens im 17. Jahrhundert", den man im 2. Band seiner gesammelten Schriften findet (3. Aufl. 1923), den Aufstieg der Mechanik bis *Galilei*. „*Galilei* kam. In ihm folgte auf mehr als zwei

Jahrtausende von Beschreibung und Formbetrachtung der Natur, die nun in dem Weltbild des *Kopernikus* einen Abschluß gefunden hatte, das Studium einer wirklichen *Analysis der Natur*." Für diese Analysis ist entscheidend die Isolierung der einfachen Vorgänge in der Komplexität des Geschehens, die Zerlegung des einmaligen Weltablaufs in einfache immer wiederkehrende Elemente. Die Formel *dissecare naturam* hatte schon *Bacon* aufgestellt. „Allein die Mathematiker haben es zur Gewißheit und Evidenz gebracht, weil sie vom Leichtesten und Einfachsten ausgegangen sind" (*Descartes*, de methodo). Die Macht der Naturwissenschaft liegt nicht zum wenigsten darin begründet, daß sie verzichtete, ein „System der Natur" in einem Zuge zu entwerfen, sondern sich mit unendlicher Geduld zu den kleinen Einzelfragen herabließ, diese aber einer restlosen Analyse zuführte. *Descartes* selber freilich sündigte in dieser Hinsicht noch kräftig gegen jene von ihm selbst gemachte methodische Bemerkung; *Galileis* Überlegenheit über ihn auf dem Felde der Naturwissenschaft liegt zum Teil darin, daß *Galilei* durch seine Untersuchungen über die Fallgesetze Ernst machte mit der Enthaltsamkeit und Beschränkung, die „den Meister zeigt"[1]). — Folgende Etappen des Verfahrens der Zerlegung in einfache Elemente, deren erste drei noch der vorwissenschaftlichen Stufe angehören, kann man unterscheiden.

1. Zerschneidung der dreidimensionalen räumlichen Wirklichkeit in einzelne, je eine anschauliche Einheit bildende, räumlich getrennte, verhältnismäßig beständige Teilsysteme *(Körper oder Dinge)*; die Vorgänge an solchen werden, solange die fortschreitende Analyse nicht zu Korrekturen zwingt, als voneinander *unabhängig* betrachtet. Hand in Hand damit: eine Zerschneidung der vierdimensionalen raumzeitlichen Wirklichkeit in einzelne raumzeitlich getrennt verlaufende, in sich zu anschaulicher Einheit zusammengeschlossene *Ereignisse*.

2. Auffassung eines anschaulich erlebten Vorganges als zustande gekommen durch raumzeitliches Zusammentreffen und *Verschmelzen* mehrerer einfacher Phänomene (deren jedes einzelne, wenn man die andern „durchstreicht" oder durch „normale Umstände" ersetzt, sich in anders gearteten Wahrnehmungen als die Gesamterscheinung bekunden würde; z. B. Sonnenuntergang hinter einer goldumränderten Wolke).

[1]) „In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister" ist eine bekannte Zeile aus Goethes Gedicht „Natur und Kunst".

3. Erfassung des *Soseins*, Abhebung der unselbständigen Teile der Phänomene, ihrer charakteristischen Züge und Merkmale. Darauf gründet sich das Zusammenordnen von Ähnlichem, das Unterordnen unter Begriffe, die *Klassifikation*, welche sich an der immer reicher werdenden Erfahrung korrigiert und so immer besser das wahrhaft Wesentliche vom Unwesentlichen scheidet und zu immer „natürlicherer" Klassenbildung fortschreitet. Ein Begriff ist um so wesenhafter, je mehr Konnotationen er nach dem Zeugnis der Erfahrung mit sich führt, je mehr nicht im Begriff selber enthaltene Merkmale den unter ihn fallenden Objekten erfahrungsgemäß gemein sind *(Mill)*.

4. Man bleibt nicht bei anschaulich abhebbaren Elementen stehen, sondern faßt eine Reihe stets zusammen auftretender Beschaffenheiten als Anzeichen eines verborgenen Etwas auf: dies führt zu *hypothetischen Elementen*, wie z. B. den Atomen, den Kräften, dem elektromagnetischen Feld. Aber nicht nur die vorfindbaren Beschaffenheiten, sondern auch die Verhaltungsweisen eines Systems beim Zusammenbringen mit anderen lernt man deuten als Bekundungen derartiger Elemente und ihres intensiven oder quantitativen Wertes (dies ist das Wesen der „Reaktion", des *Experiments*). Und endlich scheut man sich auch nicht, das anschaulich schlechthin Einfache hypothetisch zu zerlegen, z. B. das weiße Sonnenlicht in die Spektralfarben; oder die Beschleunigung, welche ein Planet erfährt, in die Teilbeschleunigungen, welche ihm die Sonne und die übrigen Planeten einzeln erteilen. Es ist klar, daß mit der Zerlegung auch die *synthetischen Prinzipien* aufgedeckt werden müssen, gemäß denen die Elemente zum Ganzen vereinigt sind (Beispiel: Resultantenbildung von Kräften).

Überall mit dem Einfachsten beginnend, findet man nun zwischen den so gewonnenen Elementen, die in allen Erscheinungen wiederkehren, zwischen ihren Wertvariationen feste, quantitativ zu erforschende, durch mathematische Funktionen ausdrückbare gesetzmäßige Beziehungen. Und zwar ist das Entscheidende: je weiter die Analyse fortschreitet, in je feineren Details also die Vorgänge erfaßt und in je feinere Elemente sie zerlegt werden, um so *einfacher* — nicht, wie man erwarten sollte, um so komplizierter — werden diese gesetzmäßigen Grundbeziehungen, und um so vollständiger und genauer erklären sie den tatsächlichen Verlauf. Und nur an Hand dieser Analyse ergeben sich auch die richtigen Begriffe, mit Hilfe deren die objektive Natur zu beschreiben ist und die durchweg an bestimmte Tatsachen und geltende Naturgesetze gebunden erscheinen.

Was zwingt uns, die einheitliche weiße Farbe in der Physik als ein Zusammengesetztes zu denken? Das Kausalgesetz, der Grundsatz, daß Gleiches unter gleichen Umständen die gleichen Reaktionen hervorruft. Er fordert, daß zwei Farben, die sinnlich als das gleiche Weiß erscheinen, „verborgene" Unterschiede aufweisen, da sie beim Durchgang durch dasselbe Prisma verschiedene Spektren liefern. (Im Prinzip geschieht hier nichts anderes, als wenn wir zwei gleich aussehende Kugeln, die verschiedene Trägheit und Schwere zeigen, aufschneiden und in der einen einen grauen Bleikern entdecken.) Man wird finden, daß man die im weißen Licht verborgene Mannigfaltigkeit am zweckmäßigsten durch die Angabe dieses Spektrums mit seiner Intensitätsverteilung beschreibt. Zunächst mischt sich hier noch der zur Reaktion benutzte Apparat, das Prisma mit seinen speziellen Eigenschaften ein, und man muß, indem man das Prisma nach Form und Substanz variiert, erst lernen, beide Einflüsse voneinander zu sondern: so kommt man zu der vom Prisma unabhängigen Wellenlängen-Skala im Spektrum. An dem Beispiel der ponderomotorischen Kraft, welche ein Probekörperchen in einem von geladenen Konduktoren erzeugten Felde erleidet, haben wir oben ein derartiges Trennungsverfahren geschildert. Polarisiertes Licht von bestimmter Spektralfarbe und Intensität aber erweist sich als etwas Einfaches, weil sein Verhalten in allen Reaktionen durch die angeführten Merkmale vollständig bestimmt ist.

Ein typisches Beispiel physikalischer Begriffsbildung ist der Galileische Massenbegriff. Wir erwähnten bereits oben das Kriterium für Massengleichheit. Hierin erscheint der Begriff des *Impulses* als primär gegenüber dem der Masse. Zwei sich gegeneinander bewegende Körper (die beide nach dem Trägheitsgesetz eine gleichförmige Translation vollführen) haben entgegengesetzt gleichen Impuls, wenn beim Zusammenstoß keiner den anderen überrennt; zwei Körper haben gleiche Masse, so wiederholen wir das Galileische Kriterium, wenn sie bei gleichen Geschwindigkeiten gleiche Impulse besitzen. Es handelt sich also um einen konstruktiven Begriff im Sinne der Schilderung auf S. 56. An Stelle oder neben die rein intellektuellen Manipulationen im Reiche der Zahlen treten hier in der Sphäre der Wirklichkeit aber reale (oder wenigstens real mögliche) Experimente, deren Ausfall zur

Wertbestimmung von Merkmalen benutzt wird. Ein Schritt von großer Tragweite war damit getan. Nachdem die Materie aller sinnlichen Qualitäten entkleidet war, schien es zunächst, als könne man ihr nur noch geometrische Eigenschaften beilegen; ganz konsequent ist hierin *Descartes*. Aber nun zeigt sich, daß man aus der Bewegung und ihrer gesetzmäßigen Veränderung bei Reaktionen andere zahlenmäßige Charakteristika der Körper ablesen kann. Es öffnete sich damit, über Geometrie und Kinematik hinaus, die *Sphäre der eigentlich mechanischen und physikalischen Begriffe*. Im Grunde steckt in der Galileischen Massendefinition das *Impulsgesetz:* „Einem isolierten Körper (der in gleichförmiger Bewegung begriffen ist) kommt ein bestimmter Impuls zu $\mathfrak{J} = m\mathfrak{v}$, d. i. ein mit seiner Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleichgerichteter Vektor. Die Impulssumme der einzelnen Körper eines isolierten Systems vor einer Reaktion ist gleich der Impulssumme nach der Reaktion." Indem man die beobachteten Bewegungen diesem Gesetz unterwirft, erhält man Daten zur numerischen Bestimmung der Verhältnisse zwischen den Massen m der verschiedenen Körper vor und nach der Reaktion. Der konstruktiven Naturwissenschaft ist die allgemeine Aufgabe gestellt: *den Gegenständen solche quantitativen Merkmale zuzuweisen, die jeweils nur von dem betreffenden Gegenstand abhängen*, wenn sie auch nicht direkt an ihm erkannt werden können, *daß ihr Verhalten unter Umständen, welche durch ebensolche Merkmale gegeben werden, auf Grund der Naturgesetze ein völlig bestimmtes und voraussagbares ist*. Die implizite Definition der Merkmale ist an diese Gesetze gebunden. So erfüllt die Wissenschaft das (unter Zugrundelegung der sinnlichen Eigenschaften nicht erfüllte) Postulat, daß „alle Veränderungen, welche sich an den Körpern ereignen, ihren Grund in dem Wesen und den Eigenschaften der Körper selbst haben" (*Euler*, Anleitung zur Naturlehre, Cap. I, 2. Opera postuma 2, 1862). Die Tatsache, daß wir die allgemeinen Prinzipien der Naturerkenntnis nicht finden, sondern mühsam erarbeiten, wurde besonders vom Konventionalismus von *H. Poincaré* betont.

Zur zeitlichen Analyse des Reaktionsvorganges übergehend, wird man, da für einen isolierten Körper k der Impuls $\mathfrak{J}$ zeitlich konstant ist, die Änderung dieser Größe pro Zeiteinheit $d\mathfrak{J}/dt$, die

Kraft, als Maß für die Einwirkung ansetzen, welche k von andern Körpern $k_1, k_2, \ldots$ erfährt. In der Tat erkannte *Newton*, daß die Kraft sich additiv, nach dem Parallelogrammgesetz der Vektoraddition, aus einzelnen Kräften zusammensetzt, welche von je einem der Körper $k_1, k_2, \ldots$ auf k ausgeübt werden; in solcher Weise, daß z. B. die Kraft, welche k_1 auf k in einem Moment ausübt, nur von dem Zustand dieser beiden Körper, ihrem Ort und ihrer Geschwindigkeit im gleichen Augenblick abhängt. Das ist der reale Sinn der Zerlegung der einheitlichen Kraft in einzelne Teilkräfte. Auf Grund der angegebenen Tatsachen kommt man notgedrungen zu der Auffassung, daß die Definition „Kraft = Ableitung des Impulses nach der Zeit“ das Wesen der Kraft nicht richtig wiedergibt, der wirkliche Sachverhalt vielmehr umgekehrt liege: die Kraft ist der Ausdruck für eine selbständige, die Körper zufolge ihrer inneren Natur und ihrer gegenseitigen Lage und Bewegungsbeziehung verknüpfende Potenz, welche die zeitliche Änderung des Impulses *verursacht*. So paßt sich die lebendig-metaphysische Vorstellung der theoretischen Konstruktion an. Durch das mechanische Grundgesetz der Bewegung wird der Physik die Aufgabe überbunden, die zwischen Körpern wirkenden Kräfte in ihrer Abhängigkeit von Ort, Bewegung und innerem Zustand zu erforschen. Der letztere wird in die Kraftgesetze mittels gewisser, für den inneren Zustand der reagierenden Körper charakteristischer Zahlen eingehen, wie z. B. die Ladung in das *Coulomb*sche Gesetz der elektrostatischen Anziehung und Abstoßung. *So wird der Kraftbegriff zu einer Quelle neuer meßbarer physikalischer Kennzeichen der Materie.*

Wenn das metaphysische Bild der Natur durch die Ergebnisse der theoretischen Konstruktion, die in ihm anschaulich-lebendig und dadurch die Weiterentwicklung fördernd zum Ausdruck kommen sollen, modifiziert wird, so liegt andererseits doch meistens eine solche mit den Tatsachen in glücklichem Einklang stehende lebendige Vorstellung der konkreten Forschung bereits zugrunde. *Galilei* sieht in den Bewegungsvorgang die dynamische Intensität, die Stoßwucht, den *impetus* oder Impuls hinein; die Bewegung erscheint ihm bedingt durch den Kampf zweier Tendenzen, der *Trägheit* und der den Körper aus seiner ihm durch die Trägheitsführung vorgeschriebenen Bahn ablenkenden *Kraft*; die Masse ist der dynamische Koeffizient, gemäß welchem die Trägheit der ablenkenden Kraft widersteht. Gerade mit Bezug auf *Galilei* bemerkt *Goethe* in seiner Geschichte der Farbenlehre (4. Abteilung, Galileo Galilei): „Alles kommt in der Wissenschaft auf das an, was man ein Aperçu nennt, auf ein Gewahrwerden dessen, was eigentlich den Erscheinungen zum Grunde liegt. Und ein solches Gewahrwerden ist bis ins Unendliche fruchtbar." Aus dem richtigen Grundaspekt ergeben sich an Hand der Detailforschung die richtigen Grundbegriffe!

Von der logischen Form der Begriffsbildung in Mathematik und Physik hat *E. Cassirer* in seinem Buche „Substanzbegriff und Funktionsbegriff" (1910) zu zeigen sich bemüht, daß sie keineswegs dem Aristotelischen Schema entspricht. Definiert man in der ebenen analytischen Geometrie die *Ellipse* durch ihre Gleichung, dadurch daß man eine definite quadratische Form der Koordinaten = 1 setzt, so gewinnt man daraus die einzelne Ellipse, wenn man für die unbestimmten Koeffizienten der quadratischen Form — die in einem von vornherein abgesteckten Bereich, dem Kontinuum aller reellen Zahlen, variieren — bestimmte Werte einsetzt. Die Bemerkung *Cassirers*, daß bei dieser Art des Vorgehens der allgemeinere Begriff der reichere sei, ist nicht zu billigen; denn die Eigenschaften der einzelnen Ellipse hängen außer von der allgemeinen Form der Gleichung noch ab von den speziellen Werten der Koeffizienten. Aber soviel ist richtig, daß hier die Einzelfälle aus dem allgemeinen dadurch gewonnen werden, daß den „Variablen" bestimmte Werte erteilt werden — innerhalb eines vollständig gegebenen oder der freien Konstruktion geöffneten Spielraums. Der Vorgang des Aufstiegs vom einzelnen Gegenstand zum Begriff geschieht bei *Aristoteles* dadurch, daß einzelne abstrakte Momente an dem Gegenstand herausgehoben werden, alles Übrige „subtrahiert" wird und die Übereinstimmung in jenen Momenten dafür maßgebend ist, daß andere Gegenstände mit dem gegebenen unter den gleichen *Begriff*, in die gleiche Klasse fallen. Dabei hat man (wie etwa in der beschreibenden Botanik und Zoologie) von vornherein nur die *wirklich vorhandenen* Gegenstände im Auge und richtet die Klassenbildung so ein, daß die Begriffe nach dem Zeugnis der Erfahrung möglichst zahlreiche „Konnotationen" mit sich führen. Im Gegensatz dazu wird bei der mathematisch-physikalischen, der „funktionalen Begriffsbildung" nicht subtrahiert, sondern es werden einzelne für sich herausgeschaute, kontinuierlicher Abstufungen fähige Momente (im Beispiel der Ellipse: die Koeffizienten der quadratischen Form) *variabel gemacht*, und der Begriff erstreckt sich hier nicht über die wirklichen, sondern über alle *möglichen* so hervorgehenden Gegenstände. „Die *beliebige Verfeinerung*, die leichte *Übersicht* und Handhabung *eines ganzen Kontinuums* von Fällen, von dessen *Vollständigkeit* wir zugleich überzeugt sind“, sagt *Mach* (Prinzipien der Wärmelehre, 3. Aufl. 1919, S. 459), „begründet den Vorzug solcher *quantitativen* Aufstellungen.“ Dabei ist es aber ganz wesentlich, daß das Kontinuum nicht ein abgeschlossener Inbegriff, sondern ein ins Unendliche offenes Bestimmungsfeld ist; denn sonst käme man doch auf das Aristotelische Schema der charakteristischen Merkmale zurück („Eine Menge von Punkten $[x, y]$ ist eine Ellipse, wenn es Zahlen a, b, c *gibt* von der Beschaffenheit, daß für alle und nur die Punkte der Menge die Gleichung

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 = 1$$

besteht“). Man muß also die einzelnen unter den funktionalen Begriff fallenden Gegenstände *erzeugen*, darf aber nicht fragen (in der Meinung, damit einem an sich bestehenden Sachverhalt gegenüberzutreten), ob ein vorgelegter Gegenstand unter ihn fällt.

Das Platonische Schema auf S. 74, das identisch ist mit dem Teilungsnetz des eindimensionalen Kontinuums, und in welchem *Plato* allen Wesen ihre Stelle anweist, indem er vom Allgemeinen zum Besonderen immer durch Zweiteilung *(Diärese)* übergeht, die darauf sich gründende Platonische Auffassung der Ideen als Zahlen steht der modernen mathematisch-naturwissenschaftlichen nicht so fern, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte. Nur darin müßte man sie modifizieren, daß wohl einzelne, aber nicht alle Stufen und Teilungen, wie *Plato* behauptet (das Bild von der „Gliederung des zu zerlegenden Opfertieres“! Phaidros 265 c, Politikos 287 c) durch die Sache selber vorgeschrieben und exakt ausführbar sind (denn allemal, wo ein einheitliches zusammenhängendes Kontinuum vorliegt, hört diese Möglichkeit auf), und ferner darin, daß der Prozeß ins Unendliche fortschreitet, das Einzelding nur am Horizont als Grenzidee erscheint. Charakteristisch für *Aristoteles* ist, daß er dieses Schema umkehrt und von unten her, von den Einzelwesen aus, beginnt.

Insbesondere sind die durch mathematische Abstraktion nach der Vorschrift am Ende von § 2 gewonnenen Begriffe „funktionaler“ Natur.

21. Theorienbildung

Der konstruktive Charakter der Naturwissenschaft, der Umstand, daß nicht ihre einzelnen Aussagen einen in der Anschauung zu verifizierenden Sinn besitzen, sondern daß die *Wahrheit* in ihr ein *System* bildet, welches nur als Ganzes geprüft werden kann, ist durch das Vorhergehende bereits deutlich geworden. *Hobbes* entwickelt den Satz (English Works VII, S. 183ff.), daß wir mit Gewißheit nur in den Wissenschaften erkennen, welche ihren Gegenstand *konstruieren* aus den im erkennenden Subjekt gelegenen Konstruktionsbedingungen. Ihm sind nicht die Bewußtseinsbilder die Wirklichkeit, sondern das in ihnen Enthaltene, das ihre Konstruktion möglich macht. Im Unterschiede von der bloßen *cognitio* sei dieser synthetische Fortgang der Erzeugung der Erscheinung aus ihrem Grunde die *scientia* in strengem Verstande. Eine solche finde innerhalb des Naturerkennens soweit statt, als mathematische Ableitung möglich ist. „So wurde", sagt *Dilthey* (a. a. O., S. 260), „durch die großen Entdeckungen von *Kopernikus*, *Kepler* und *Galilei* und die sie begleitende Theorie von der Konstruktion der Natur durch a priori gegebene logisch-mathematische Bewußtseinselemente definitiv das souveräne Bewußtsein der Autonomie des menschlichen Intellekts und seiner Macht über die Dinge begründet: eine Lehre, welche zur herrschenden Überzeugung der am meisten fortgeschrittenen Geister wurde." In der Physik der neueren Zeit sind nicht mehr durch Abstraktion aus dem Wirklichen gewonnene Bewußtseinselemente die Bausteine der Konstruktion, sondern rein „arithmetische" Symbole. *Dingler* (Die Grundlagen der Physik 1923, S. 305) definiert die Physik geradezu als dasjenige Wissenschaftsgebiet, in welchem das Prinzip der symbolischen Konstruktion völlig durchgeführt ist. Aber mit der apriorischen Konstruktion ist gekoppelt die *Erfahrung* und die *Analyse der Erfahrung durch das Experiment*. „Die wissenschaftliche Einbildungskraft des Menschen wurde geregelt durch die strengen Methoden, welche die *Möglichkeiten*, die im mathematischen Denken lagen, der Erfahrung, dem *Experiment* und der *Bestätigung durch die Tatsachen* unterwarfen ... Die so gefundenen

Ergebnisse haben ein zusammenhängendes und regelmäßiges *Fortschreiten* des wissenschaftlichen Denkens in der gemeinsamen Arbeit der verschiedenen Länder möglich gemacht. Man kann sagen, daß erst von nun ab die menschliche Vernunft gleichsam als eine einheitliche Kraft innerhalb der verschiedenen Kulturnationen zu einmütiger Wirkung gelangte. Das schwerste Werk des menschlichen Geistes auf diesem Planeten wurde durch diese Regelung der wissenschaftlichen Phantasie vollzogen, welche sich den Erfahrungen unterordnete" (*Dilthey*, Der entwicklungsgeschichtliche Pantheismus, Ges. Schr. II, S. 346).

Illustrieren wir das Gesagte etwa durch die Theorie der elektromagnetischen Vorgänge; da es nur auf das Prinzipielle ankommt, mag es erlaubt sein, um dem Leser die Schwierigkeiten der relativistischen Physik zu ersparen, die Ausbreitungsgeschwindigkeit $= \infty$ zu setzen. Wir nehmen an, es seien Elementarquanten der Materie da, die mit ein für allemal festen Massen und Ladungen behaftet sind. Ort und Geschwindigkeit dieser Elektronen in einem Augenblick t bestimmen zufolge gewisser Erzeugungsgesetze das elektromagnetische Feld. Dieses Feld ist nach weiteren Gesetzen mit räumlich verteiltem Impuls und Energie verbunden und übt infolge des Impulsstromes bestimmte ponderomotorische Kräfte auf die erzeugenden Elektronen aus. Die Kraft endlich erzeugt nach dem Grundgesetz der Mechanik die Beschleunigung der Elektronen, Geschwindigkeit und Beschleunigung aber geben die Änderung von Ort und Geschwindigkeit im nächsten Zeitteilchen dt an und bestimmen damit aus Ort und Geschwindigkeit im Momente t die gleichen Data im Momente $t + dt$. Durch Integration resultiert aus dieser immer wiederholten Fortsetzung $t \rightarrow t + dt$ die ganze Bewegung. Erst dieser volle theoretische Zusammenhang, in den natürlich auch die Geometrie entscheidend hineinspielt, ist einer experimentellen Nachprüfung fähig — wenn wir annehmen, daß die Bewegung der Elektronen das ist, was wir direkt beobachten können (was ja auch nur sehr bedingt zutrifft); nicht aber ein einzelnes aus diesem theoretischen Gefüge herausgegriffenes Gesetz! So wachsen im Grunde *alle* Teile der Physik und der Geometrie zu einer unlöslichen Einheit zusammen. Es hängt damit zusammen, daß die Theorie, gedrängt durch die ständig reicher und präziser werdende Erfahrung, sich nur durch fortgesetzte *Korrektur* entwickelt. „Der Fortschritt der Wissenschaft stützt sich also auf die Wissenschaft selbst, er ist eine *Erweiterung*, keine *Neu-Schöpfung*" (*Enriques*, Probleme der Wissenschaft, 1910, Bd. 1,

S. 248). So war bei der Begründung der Kepler-Newtonschen Planetentheorie durch die Beobachtung stillschweigend jedes Ereignis in den Zeitpunkt seiner Wahrnehmung gesetzt. Hernach entdeckte *Roemer* dann an den scheinbaren Abweichungen der Bewegung der Jupitermonde von der theoretisch geforderten die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes. Man benutzt also eine Theorie (momentane Ausbreitung des Lichts), die man hernach als falsch erweist; aber ihre *grobe Richtigkeit ergibt* (mit anderen der Erfahrung entnommenen Prämissen zusammen) ihre *feine Ungenauigkeit* und ihre Korrektur. Ohne die Annahme ihrer groben Richtigkeit kann man jedoch zunächst überhaupt keinen Schritt vorwärts tun. Hierauf bezieht sich *Newtons* 4. Regel zur Erforschung der Natur (Principia, S. 389): „In der Experimentalphysik muß man die aus den Erscheinungen durch Induktion geschlossenen Sätze, wenn nicht entgegengesetzte Voraussetzungen vorhanden sind, entweder genau oder sehr nahe für wahr halten, bis andere Erscheinungen eintreten, durch welche sie entweder größere Genauigkeit erlangen oder Ausnahmen unterworfen werden."

Um dem Theoretiker seine Aufgabe zu erleichtern, bemüht sich schon der Experimentator, den Versuch so einzurichten, daß er gegenüber einem Gesetz möglichst empfindlich, gegenüber allen andern in Betracht kommenden aber möglichst unempfindlich ist, indem er den Einfluß der von ihnen regierten Nebenumstände abdämpft: hierin besteht u. a. die mühsame Arbeit der Abschirmung aller möglichen „Fehlerquellen". Dennoch läßt sich der Einfluß gewisser Elemente wie z. B. das Maßfeld niemals eliminieren. Wenn eine Tatsache mit dem gesamten theoretischen Bestand der Wissenschaft nicht in Einklang steht, so bleibt es schließlich doch dem Theoretiker überlassen, die Stelle zu finden, an der die Theorie zu modifizieren ist. Allgemeine Regeln lassen sich darüber kaum geben, sowenig wie für das Gewicht, mit dem die vorliegenden Tatsachen bei einer theoretischen Deutung einzusetzen sind: hier tritt das Genie in seine Rechte. So entstand die allgemeine Relativitätstheorie dadurch, daß *Einstein* die prinzipielle Natur und die besondere Tragfähigkeit des Satzes von der Übereinstimmung zwischen schwerer und träger Masse erkannte. Es ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß *verschiedene Konstruktionen* zur Erklärung der Wahrnehmungen geeignet sind; in dieser Einsicht von der „*Vieldeutigkeit der Wahrheit*" gehen *Hobbes* und *d'Alembert* den modernen Positivisten voran. Mit großer Gerechtigkeit kennzeichnet *Einstein* in einer Ansprache an *Planck* (zu Max Plancks 60. Geburtstag, 1918) die wirkliche erkenntnistheoretische Situation dahin: „Die Entwicklung hat gezeigt, daß von den denkbaren theoretischen Konstruktionen eine einzige jeweilen sich als unbedingt überlegen über alle andern erweist. Keiner, der sich in den Gegenstand wirklich vertieft hat, wird leugnen, daß die Welt der Wahrnehmungen das theoretische System praktisch eindeutig bestimmt, trotzdem kein logischer Weg zu den Grundsätzen der Theorie führt."

Bei dem jeweiligen Stande des theoretischen Gebäudes besteht eine Hierarchie der Gesetze; es werden ihnen verschiedene *Grade der Festigkeit* zugeschrieben. Gewisse unter ihnen werden mit großer Zähigkeit als Prinzipien festgehalten. Als geradezu sakrosankt galten lange Zeit die Gesetze der euklidischen Geometrie; von vergleichbarer, wenn nicht noch höherer Festigkeit sind die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses. Es ist sicher, daß ein beträchtlicher Teil des theoretischen Systems allen Erfahrungen gegenüber aufrechterhalten werden kann, wenn für den Rest Modifikationen gestattet sind. So existiert in der Praxis der naturwissenschaftlichen Arbeit nicht der schroffe Gegensatz von a priori und a posteriori im Kantischen Sinne, sondern eine reiche Stufenskala der Festigkeit. Die einfache Form und der instinktiv einleuchtende Charakter von Gesetzen zusammen mit ihrer Wichtigkeit für ein großes mannigfaltiges, von ihnen entscheidend beherrschtes Tatsachengebiet, gibt ihnen den Rang von *Prinzipien*. So hält man an dem einleuchtenden und einfachen Trägheitsgesetz, das zunächst durch die Erfahrungen über die Bewegungen *relativ zur Erde* hinreichend gestützt erscheint, auch dann fest, wenn feinere Erfahrungen (*Foucaultscher* Pendelversuch) ihm widersprechen, indem man die „Ausflucht" ergreift, daß es sich nicht um die Bewegung relativ zur Erde, sondern um eine aus den Phänomenen zu ermittelnde „absolute Bewegung" handle. Das Impulsgesetz stützt sich auf die „einleuchtende" Tatsache, daß sich ein zunächst ruhendes Körpersystem nicht aus eigener Kraft in eine einseitig fortschreitende Translationsbewegung versetzen kann; oder genauer: innere Reaktionen in einem isolierten ruhenden Körpersystem sind nicht imstande, zu bewirken, daß nach der Reaktion ein Teil des Systems eine gemeinsame gleichförmige Translationsbewegung ausführt, während der Rest ruhend zurückbleibt. In dem Lachen über die Lügengeschichte Münchhausens, daß er sich an seinem eigenen Zopf aus dem Sumpfe gezogen habe, gibt jeder zu verstehen, wie gut er instinktiv um jene Tatsache Bescheid weiß. Weitere Beispiele sind die Regel für die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, die von *Galilei* fast unbemerkt (Discorsi, 4. Tag) als evident angenommen wird, und das *Energieprinzip*.

In der besonderen Form, daß die Körper eines Systems im homogenen Schwerefeld sich nicht aus eigener Kraft alle auf ein höheres Niveau heben können, wird es von *Galilei* und *Stevin* zur Herleitung der Gesetze der schiefen Ebene, von *Huyghens* (im Horologium oscillatorium 1673) zur Reduktion des zusammengesetzten Pendels auf das „mathematische" verwendet. *Huyghens* hat die allgemeine Idee des Energieprinzips bereits gefaßt; er sagt (a.a.O., S. 95): „Und wenn die Erfinder neuer Maschinen, die in vergeblicher Mühe ein perpetuum mobile zu bauen suchen, dieser meiner Hypothese (!) folgen wollten, so würden sie leicht selbst ihren Irrtum erkennen und würden einsehen, daß ihr Ziel vollkommen unerreichbar ist." *Leibniz* gründet auf das Energieprinzip, das er in die Formel *causa aequat effectum* hineinliest und als eine durch die „Logik der Quantität" geforderte spezielle Folge des Satzes vom Grunde ansieht, sein Maß für die „lebendige Kraft". Viel größeres Gewicht als ein einzelnes bestätigendes Experiment hat eine unter den wechselvollsten Umständen sich immer von neuem bewährende *negative Erfahrung*. So ist das Energieprinzip gestützt durch das Scheitern aller Versuche zur Herstellung eines perpetuum mobile, und von gleicher Art sind auch die Grundsätze der Relativitätstheorie: das spezielle Relativitätsprinzip und das Prinzip von der „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit". Gegen die scholastische Philosophie gewendet, sagt *Newton* (Optik, Ed. sec., S. 409): „Wenn man uns sagt, jede Spezies der Dinge sei mit einer spezifischen verborgenen Eigenschaft begabt, durch welche sie wirkt und sichtbare Effekte hervorbringt, so ist damit gar nichts gesagt; wenn man aber aus den Erscheinungen zwei oder drei allgemeine Prinzipien der Bewegung herleitet und dann angibt, wie aus diesen klaren Prinzipien die Eigenschaften und Wirkungen aller körperlichen Dinge folgen, so wäre dies ein großer Fortschritt in der Naturforschung, wenn auch die Ursachen dieser Prinzipien noch nicht entdeckt sein würden."

Die Einfachheit gilt als sigillum veri. „Die Natur liebt Einfachheit und Einheit“, heißt es bei *Kepler* (Opp. ed. Frisch I, 113)[1]). Vorgebildet ist dieser Grundsatz bei *Aristoteles* (De coelo I, 4, 271 a): *At deus et natura nihil prorsus faciunt frustra,* und es gilt als Axiom: *„frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.“* *Galilei* gibt am dritten Tag der Discorsi den Gedankengang wieder, der ihn zu den Fallgesetzen geführt hat; es heißt (Opere XIII, S. 155): „Wenn ich daher bemerke, daß ein aus der Ruhelage von bedeutender Höhe herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt, warum soll ich nicht glauben, daß solche Zuwüchse in allereinfachster, jedermann plausibler Weise zustande kommen? Wenn wir genau aufmerken, werden wir keinen Zuwachs einfacher finden als denjenigen, der in immer gleicher Weise hinzutritt.“ Er stellt dann die Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung auf, entwickelt daraus zunächst unbekümmert um die Erfahrung die Konsequenzen und findet dann diejenigen, welche mit seinen Mitteln sich beobachten ließen, für die „natürlich beschleunigte“ Bewegung der fallenden Körper bestätigt. Unter *Newtons* Regeln zur Erforschung der Natur lautet die erste: „Als Ursachen zur Erklärung natürlicher Dinge nicht mehr zulassen, als wirklich sind und zur Erklärung jener Erscheinungen ausreichen.“ Nun kommt es natürlich nicht darauf an (wie *Dingler* es in seinen „Grundlagen der Physik“ fordert), die *absolut* einfachsten Grundsätze aufzustellen (dann würde man der Welt z. B. nicht 4, sondern nur 1 Dimension beilegen), es muß vielmehr dabei die ganze Breite der gegenwärtigen Erfahrung berücksichtigt und die *relativ* zu den bekannten Erscheinungen einfachste Erklärung gesucht werden. Oft ist für ein Teilgebiet eine Erklärung A einfacher als eine andere B; aber während bei Ausdehnung des Erfahrungskreises A sich beständig kompliziert, tritt dies bei B nicht ein, so daß schließlich B als die überlegene Theorie erscheint. Ferner ist die geforderte Einfachheit nicht die auf der Hand liegende; sondern die wahre innere Einfachheit zu erkennen, dazu müssen wir uns durch die Natur erziehen lassen.

---

[1]) Außerdem in: Johannes Kepler, Gesammelte Werke, Band I, München 1938, S. 16, Z. 21. — Deutsche Wiedergabe in: Max Caspar, Johannes Kepler: Das Weltgeheimnis (1596). München-Berlin 1936, S. 31.

Das Problem der Einfachheit ist von zentraler Bedeutung für die naturwissenschaftliche Erkenntnistheorie. Man hat versucht, diesen einer objektiven Fassung schwer zugänglichen Begriff auf den bereits in das mathematische Denksystem bis zu einem gewissen Grade eingefangenen der *Wahrscheinlichkeit* zurückzuführen. Liegen z. B. 20 zusammengehörige Wertepaare (x, y) eines funktionalen Zusammenhangs $y = f(x)$ bei Eintragung in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der zu erwartenden Genauigkeit auf einer geraden Linie, so wird man als strenges Naturgesetz vermuten, daß y von x linear abhängig ist. Und zwar um der Einfachheit der geraden Linie willen, oder auch weil es außerordentlich unwahrscheinlich sein würde, daß gerade die 20 herausgegriffenen Beobachtungspaare (nahezu) auf einer Geraden liegen, wenn das zugrunde liegende Gesetz ein anderes wäre. Indem man die gerade Linie nun zur Inter- und Extrapolation benutzt, kommt man zu Voraussagen, die über den Inhalt der Beobachtungen hinausgehen. Aber diese Analyse ist einigermaßen anfechtbar. Man kann unter allen Umständen auf mannigfache Art Funktionen $y = f(x)$ mathematisch definieren, welche den 20 Beobachtungsdaten gerecht werden, darunter solche, die ganz und gar von einer Geraden abweichen. Auch für jede von ihnen könnte man es als außerordentlich unwahrscheinlich hinstellen, daß die 20 Beobachtungspunkte auf ihr sich befänden, wenn sie nicht das wahre Gesetz enthielte. Es ist also doch wesentlich, daß die Funktion oder vielmehr die Funktionsklasse *a priori* von der Mathematik wegen ihrer mathematischen Einfachheit bereit gestellt sei; die Funktionsklasse darf dabei nicht von so vielen Parametern abhängen wie die Zahl der zu befriedigenden Beobachtungen beträgt (so hängt die Klasse der linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ von nur 2 Parametern a, b ab, deren Werte den Beobachtungsdaten angepaßt werden können). Eine wichtige Bewährung der Theorie liegt vor, wenn sie mit den Tatsachen, zu deren Erklärung sie ersonnen wurde, auch bei *Verschärfung der Beobachtungsgenauigkeit* (und Vervielfältigung der Beobachtungspunkte) in Einklang bleibt. Dies ist z. B. der Fall mit der euklidischen Geometrie, die sich durch die geodätischen und astronomischen Präzisionsmessungen als viel genauer gültig erwiesen hat, als man es nach den Erfahrungen vermuten konnte, die zu ihrer Aufstellung geführt haben. Aber sie steht mit solcher Bewährung des Prinzips der Einfachheit durchaus nicht isoliert da; sondern entsprechende Fälle ereignen sich in der Physik immer wieder. Umgekehrt ist es ein sicheres Zeichen dafür, daß man sich auf dem Holzwege befindet, wenn es so geht, wie mit den Ptolemäischen Epizykeln, deren Zahl jedesmal vermehrt werden mußte, wenn die Genauigkeit der Beobachtung stieg. Die drei *Kepler*schen Gesetze waren viel einfacher und genügten doch den Beobachtungen merklich genauer als das komplizierteste bis dahin ersonnene Epizykelnsystem; die Entdeckung der Ellipse als einer mathematisch durchsichtigen und einfachen Figur durch die griechischen Geometer mußte aber *Keplers* astronomischer Entdeckung vorangegangen sein. *Newtons* Attraktionsgesetz, namentlich in der Formulierung als Nahewirkungsgesetz, ist abermals einfacher als die *Kepler*sche Theorie der Planetenbewegung. Aus jenem gewinnt man diese zurück, wenn nur die Anziehungskraft der Sonne auf einen Planeten, nicht die von den übrigen Planeten ausgehenden „Störungen" berücksichtigt werden. Und wieder liegt eine glänzende Bestätigung für die von *Newton* vollzogene Tieferlegung der theoretischen Fundamente darin, daß die Berechnung der Störungen nach seinem Gesetz Ergebnisse lieferte, die sich der seit *Tycho Brahes* Zeit abermals bedeutend gestiegenen Beobachtungsgenauigkeit vollkommen einfügten. — Es kommt hinzu, daß sich das Gravitationsgesetz auch außerhalb des Erfahrungskreises als gültig erwies, für welchen es ursprünglich aufgestellt wurde, nämlich für die Bewegungen der Doppelsterne umeinander.

Hat die Erfahrung eine *Hypothese* nahegelegt, so gilt es ihre Konsequenzen *deduktiv* zu entwickeln, immer im Hinblick darauf, zu Folgerungen vorzudringen, welche der Prüfung durch das Experiment zugänglich sind. *Huyghens* schildert die Methode in der Einleitung zu seinem Traité de la Lumière (1678 verfaßt, 1690 herausgegeben): sie unterscheide sich sehr von der Geometrie, „weil hier die Prinzipien sich durch Schlüsse bewahrheiten, welche man daraus zieht ... Es ist dabei gleichwohl möglich, bis zu einem Wahrscheinlichkeitsgrade zu gelangen, der sehr oft einem strengen Beweise nichts nachgibt. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn die Folgerungen, welche man unter Voraussetzung dieser Prinzipien gezogen hat, vollständig mit den Erscheinungen im Einklang sind, welche man aus der Erfahrung kennt; besonders wenn deren Zahl groß ist, und vorzüglich noch, wenn man neue Erscheinungen sich ausdenkt und voraussieht, welche aus der gemachten Annahme folgen, und findet, daß dabei der Erfolg unserer Erwartung entspricht." Die Wellentheorie des Lichtes bewährt sich ihm u. a. in der Aufdeckung des Gesetzes der Doppelbrechung im Kalkspat. Es ist zu kompliziert, um rein empirisch gefunden zu werden. Macht man aber für die Ausbreitung der Lichtwellen im Kalkspat die einfachste Annahme, welche über die der Kugelwelle hinausgeht, so kommt man zu den gesuchten Brechungsgesetzen, die mit der Erfahrung in Einklang stehen. Es ist als Erfolg einer Theorie zu buchen, wenn sie die komplizierten Abhängigkeiten zwischen den direkt beobachteten Größen auf einfache Beziehungen zwischen den Fundamentalgrößen der Theorie zurückführt. Ähnlich war *Galilei* bei Aufdeckung der Fallgesetze verfahren. — „Die wesentliche Funktion einer Hypothese", sagt *Mach* (Erkenntnis und Irrtum, S. 237), „besteht darin, daß sie zu neuen Beobachtungen und Versuchen führt, wodurch unsere Vermutung bestätigt, widerlegt oder modifiziert, kurz die Erfahrung erweitert wird." „Der Seemann, in dessen Phantasie durch die an die Küste getriebenen Objekte das Bild des fernen Landes mit sinnlicher Lebendigkeit auftaucht, *sucht* nach demselben. Ob er es findet oder nicht, ob er auch statt der vermuteten indischen oder chinesischen Küste eine neue findet, auf jeden Fall hat er seine Erfahrungen erweitert" (a.a.O., S. 231). — Bei *Galilei*, bei *Huyghens*, bei *Newton* spielt der deduktive Teil noch eine viel größere Rolle als in der neueren Zeit; *Galilei* ist nicht minder stolz auf die „Fülle von Theoremen, welche er aus einem einzigen Prinzip gewinnt", als auf die Entdeckung dieses Prinzips selber (Ende des 3. Tages der Discorsi). Der empirische Einschlag der Physik hat sich fortschreitend verstärkt; den ersten großen Einbruch bringt die Entdeckung der Elektrizität.

Mit der Einfachheit in enger Beziehung steht die Kategorie der *Vollkommenheit*. Eine große Rolle nicht nur als methodisches, sondern als Erklärungsprinzip spielt sie in der Aristotelischen Philosophie. So hängt nach *Aristoteles* die von ihm behauptete Unzerstörbarkeit und Unveränderlichkeit der Himmelskörper an ihrer vollkommenen Kugelgestalt. *Galilei* bemerkt im Dialogo dazu: erstens ist unter diesem Aspekt eine Abweichung von der exakten Kugelgestalt um Haaresbreite so wenig zulässig wie ganze aufgesetzte Berge; sein Kontinuitätsgefühl sträubt sich dagegen, daß in der Natur, die gar keine absolut genauen Messungen ermöglicht, ein bestimmter exakter Wert einer kontinuierlichen Größe ihrem Träger Eigenschaften verleihen soll, die prinzipiell abweichen von denjenigen, die sich bei beliebig benachbarten Größenwerten ergeben. Zweitens aber wendet er ein, daß ja auch z. B. in einem Tetraëder eine Kugel enthalten sei und daher höchstens die übrigbleibenden Ecken des Tetraëders zerstörbar sein könnten (in die sich freilich abermals Kugeln einbeschrieben ließen). Er beweist dadurch schlagend, daß es für eine solche Eigenschaft wie die Unzerstörbarkeit gar nicht auf die geometrische Gestalt ankommen könne, sondern allein auf die Grenzfläche, über die hinüber die *physikalischen* Zustandsgrößen (hier die Dichte der

Materie) einen Sprung erleiden und die dadurch zum Sitz besonderer Oberflächenkräfte werden kann. (Für die kugelige Gestalt der Regentropfen spielen solche Kapillarkräfte in der Tat eine Rolle.) Man erlebt hier so scharf wie kaum an einer anderen Stelle im Dialog die radikale Umwendung in der Naturdeutung, die das Galileische gegenüber dem Aristotelischen Denken herbeiführt. Bezeichnend in dieser Hinsicht ist auch das überschwengliche, aus einem gewandelten Empfinden quellende *Lob der Veränderlichkeit*, das *Galilei* wider jene kristallene Vollkommenheit anstimmt (Dialogo, Opere I, S. 67): wie doch die zur Blüte sich entwickelnde Pflanze etwas unvergleichlich viel Herrlicheres sei als die starren, allem Geschehen entrückten Aristotelischen Weltkörper. In *Keplers* Werk nehmen Betrachtungen über Vollkommenheit noch einen breiten Raum ein. Ihn beschäftigt der „Rang der Erde"; da er von der Vollkommenheit des Kreises durchdrungen ist, kostet es ihn einen harten Kampf, die Kreisbahn des Mars aufzugeben, als ihn die Messungen *Brahes* dazu zwingen. Er haftet zunächst noch ganz am *Statischen*, in den *regulären Körpern* will er die Harmonie des Planetensystems entdecken; erst mühsam ringt er sich zu einer mehr dynamischen Auffassung des Weltgeschehens durch. Ja auch *Galilei* unterliegt noch an einer merkwürdigen Stelle im Dialog dem Zauber der Erklärung durch die geometrische Vollkommenheit, indem er auf sie den kreisförmigen (nicht geradlinigen!) Verlauf der reinen Trägheitsbewegung basiert. Im ganzen hat er aber schon viel entschiedener als *Kepler* die Wendung vollzogen, Vollkommenheit nicht mehr in den festen Gestalten und in den Einzeldingen zu suchen, sondern in den dynamischen Verknüpfungen, den Naturgesetzen (die einen breiten Spielraum des Zufälligen, der bloßen Faktizität offen lassen), und der Begriff der Vollkommenheit ist ihm nicht mehr sachlicher Bestandteil der Theorie, sondern *heuristisches Prinzip* und zum Forschen antreibender *Glaube* geworden. Mit den antiken Pythagoreern teilen *Kepler*, *Galilei*, *Bruno* den Glauben an einen nach höchsten und vollkommensten vernunftmäßigen mathematischen Gesetzen geordneten *Kosmos*, und an die göttliche Vernunft als den Ursprung des Vernunftmäßigen in der Natur, mit welchem zugleich die menschliche Vernunft verwandt ist. Auf dem langen Erfahrungsweg in den folgenden Jahrhunderten hat dieser Glaube je länger, je mehr immer wieder überraschende Teilerfüllungen in der Physik gefunden (die schönste vielleicht in *Maxwells* wundervoll harmonischer Theorie der elektromagnetischen Vorgänge im Äther); aber immer wieder erwies sich die Natur noch dem menschlichen Geiste überlegen und zwang ihn, einen voreiligen Abschluß zugunsten einer tieferen Harmonie wieder zu zerbrechen.

Zwei *strenge Forderungen* sind nach § 19 *an jede Theorie* zu stellen: 1. die *Einstimmigkeit*, welche die Widerspruchslosigkeit einschließt, 2. das *Fehlen überflüssiger* rein dogmatischer *Bestandteile*, die ohne Einfluß auf die beobachtbaren Erscheinungen sind. — Nie verletzt werden darf ferner der *Satz vom zureichenden Grunde*; er kann in einfachen Fällen als *Symmetrieprinzip* zur Aufstellung von Gesetzen führen. So benutzt ihn *Archimedes*, wenn er seine Theorie des Hebels mit dem Satze beginnt, daß gleiche Gewichte an gleich langen Hebelarmen sich im Gleichgewicht befinden. Denn die ganze Konfiguration, samt der Schwererichtung, geht in sich über durch Spiegelung an der im Unterstützungspunkt zum horizontalen Hebelarm senkrechten Ebene. Der Begriff der räumlichen Ähnlichkeit ist die Grundlage des Schlusses; geht eine Massen- und Kräfte-Konfiguration oder ein Zustand, der das weitere Geschehen eindeutig determiniert, durch eine ähnliche Abbildung in sich über, so muß das, was geschieht, dieser Abbildung gegenüber gleichfalls invariant sein. Darum kann unter den angegebenen Umständen der Waagebalken sich nicht nach einer Seite neigen. In Verbindung mit dem allgemeinen mechanischen Axiom, daß ein System im Gleichgewicht nicht aufhört, im Gleichgewicht zu bleiben, wenn man ein Teilsystem abspaltet, das für sich im Gleichgewicht ist, leitet *Archimedes* dann aus jenem einfachsten Fall das allgemeine Hebelgesetz ab. — Derselbe Gedankengang führt zu dem Satz: Gleiche Körper haben gleiche träge Masse; d. h. wenn sie mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten gegeneinander gejagt werden, überrennt keiner den anderen. Ist das dennoch bei zwei gleich aussehenden Körpern der Fall, so schließen wir daraus auf eine innere Verschiedenheit, die sich freilich ungünstigsten Falles in nichts anderem dokumentiert als in der Verschiedenheit der Masse, uns aber immerhin an-treiben wird, auch nach anderen Verschiedenheiten im physikalischen Verhalten zu suchen. Häufig ist das Prinzip vom zureichenden Grunde zum *Beweise des Trägheitsgesetzes* herangezogen worden, indem aus ihm geschlossen wurde, daß der Zustand eines sich selbst überlassenen Körpers unverändert bleiben muß. Aber was ist unter „Zustand“ zu verstehen? Die Scholastik interpretierte ihn als Ort und glaubte daher, daß ein Körper im Moment, wo alle Einwirkung auf ihn aufhört, stille stehen bleibt, nach *Galilei* ist darunter die *Geschwindigkeit* nach Größe und Richtung zu verstehen. Offenbar kann nur die Erfahrung darüber entscheiden, welche Auffassung recht hat. Sie muß uns auch in den oben angeführten Fällen über die „maßgebenden“, die determinierenden Umstände unterrichten. Die Argumentation von *Leibniz* in der Kontroverse mit *Clarke* und *Newton* über die Relativität der Bewegung (S. 127) ist ein typisches Beispiel für die Anwendung des Prinzips vom zureichenden Grunde. Freilich hat *Leibniz* zweifellos die Tragweite des Prinzips als Quelle von Tatsachenwahrheiten weit überschätzt.

Mach, der das a priori bekämpft, das Bestreben, „aus den Instinktiven in der Wissenschaft“, wie er sich äußert, „eine neue Mystik zu machen und dasselbe etwa für unfehlbar zu halten“, weist in seiner Mechanik (7. Aufl. 1912, S. 27) darauf hin, daß „selbst instinktive Erkenntnisse von so großer logischer Kraft wie das von *Archimedes* verwendete Symmetrieprinzip irre führen können. Mancher Leser wird sich vielleicht erinnern, welche geistige Erschütterung es ihm verursachte, als er zum ersten Male hörte, daß eine im magnetischen Meridian liegende Magnetnadel durch einen über derselben parallel hingeführten Stromleiter in einem bestimmten Sinne aus dem Meridian abgelenkt wird.“ Aber dem Symmetrieprinzip geschieht Genüge, wenn wir annehmen, daß durch Spiegelung an der Ebene, in der Strom und Magnetnadel liegen, wohl der Strom, nicht aber der Magnet in sich übergeht, sondern der letztere Nord- und Südpol vertauscht. Diese Ansicht ist freilich nur möglich, weil positiver und negativer Magnetismus untrennbar und wesensgleich sind. Wir bilden eine solche theoretische Vorstellung vom Wesen des Magnetismus aus — er wird durch molekulare elektrische Kreisströme senkrecht zur Nadel verursacht —, daß jene Tatsachen ihr Erstaunliches verlieren und zu Wesensnotwendigkeiten werden.

Ein weiterer Führer des Theoretikers ist das zuerst von *Leibniz* allgemein ausgesprochene *Kontinuitätsprinzip*, das auf der Unmöglichkeit eigentlicher Teilung eines einheitlichen Kontinuums beruht. Es ist naturwissenschaftlich verkehrt, den Nullwinkel und den gestreckten, wie *Euklid* es tut, aus dem Begriffsumfang des Winkels auszuschließen; die Ruhe ist nicht der Bewegung kontradiktorisch entgegengesetzt, sondern ein Grenz- oder Sonderfall der Bewegung. *Leibniz* sagt, vermöge jenes Prinzips sei „das Gesetz für die ruhenden Körper gewissermaßen nur ein besonderer Fall der allgemeinen Regel für die bewegten Körper, das Gesetz der Gleichheit gewissermaßen ein Fall der Ungleichheit, das Gesetz für das Geradlinige gleichsam eine Unterart des Gesetzes für das Krummlinige", und er bezeichnet Gebilde als „*homogon*, sofern durch kontinuierliche Veränderung eins in das andere übergehen kann" (In. rer. Math. metaph., Math. Schr. VII, S. 25 und S. 20). Er widerlegt mit Hilfe der *lex continui* die Stoßgesetze, welche *Descartes* aufgestellt, aber für eine ganze Reihe verschiedener Fälle verschieden formuliert hatte. *Galilei* leitet (Dialogo, Op. I, S. 162/164) das Trägheitsgesetz ab, indem er die Neigung der schiefen Ebene, für welche er die Fallgesetze kennt, gegen die Horizontale zu 0 abnehmen läßt; die Trägheitsbewegung ist Limes der Fallbewegung. Durch diese Herkunft wird es verständlich, daß *Galilei*, wie es scheint, das Trägheitsgesetz in seiner klassischen Form nur für Bewegungen als richtig erachtete, die senkrecht zur Schwererichtung erfolgen (eine Ansicht, der man vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie in gewissem Sinne beipflichten kann). *Mach* (Mechanik, S. 131) gibt die Anweisung: „Hat man für einen speziellen Fall eine Ansicht gewonnen, so modifiziert man allmählich in Gedanken die Umstände dieses Falles, soweit es überhaupt angeht, und sucht hierbei die gewonnene Ansicht möglichst festzuhalten. Es gibt kein Verfahren, welches sicherer zur einfachsten, mit dem geringsten Gemüts- und Verstandesaufwand zu erzielenden Auffassung aller Naturvorgänge führt." Um die Richtigkeit einer gewonnenen Gesamtanschauung zu prüfen, ist es anderseits eine in Mathematik und Physik vielgeübte Methode, die Grenz- und Sonderfälle ins Auge zu fassen, in denen sich die Verhältnisse meist viel leichter überblicken lassen.

In naher Verwandtschaft zum Kontinuitätsprinzip steht das *Analogieprinzip*, das *Newton* in der 2. seiner Regeln zur Erforschung der Natur so formuliert: „Man muß daher, soweit es angeht, gleichartigen Wirkungen dieselbe Ursache zuschreiben." Am großartigsten tritt uns das Analogieprinzip wohl in der *Begründung der Atomtheorie* entgegen. Die mechanischen Gesetze, die aus dem Verhalten an den grob sichtbaren Körpern abgeleitet wurden und an den größten, den Planeten, ihre genaueste Bestätigung fanden, werden auf die Atome übertragen. Die Tatsachen werden ev. später zu Korrekturen zwingen; aber ohne diesen Ansatz ist überhaupt kein Beginn der atomaren Forschung denkbar. Noch die neueste Quantenmechanik der Atome, die so radikal von dem Herkömmlichen abweicht, daß sie auf jedwedes räumliche Bild der atomaren Vorgänge verzichtet, knüpft doch an die alten mechanischen Gesetze in ihrer durchsichtigsten Form, an die Hamiltonschen Gleichungen an. *H. A. Lorentz* gewann die elektromagnetischen Grundgesetze der Elektronentheorie dadurch, daß er in den phänomenologischen, der Beobachtung entnommenen *Maxwell*schen Gleichungen, mit denen der Elektrotechniker arbeitet, alle Größen strich, in denen der Einfluß der Materie durch *Materialkonstanten*, wie Leitfähigkeit u. dgl., sich kundgibt, nämlich Leitungsstrom, elektrische Polarisation und Magnetisierung. Aus der Annahme, daß das wahre, das „mikroskopische" elektromagnetische Feld diesen vereinfachten harmonischen Gesetzen genügt, konnte er, in Verbindung mit gewissen Vorstellungen über den atomaren Aufbau der Materie, für die der Beobachtung zugänglichen Mittelwerte, das makroskopische Feld, die alten phänomenologischen Gesetze wieder herleiten.

Die exakten Naturgesetze dürfen keine Materialkonstanten enthalten, sondern diese müssen aus jenen auf Grund des Atombaus bestimmt werden können. Da die phänomenologischen Materialgesetze bei Vorgängen zu versagen pflegen, für welche die feinere Struktur der Materie nicht gleichgültig ist, muß die atomistische Theorie zugleich deren Gültigkeitsgrenzen erkennen lassen und diejenigen atomistischen Gesetze liefern, welche jenseits jener Grenzen an die Stelle der phänomenologischen treten, die den Einfluß der Materie nur in Bausch und Bogen berücksichtigen. So hatte *Maxwell* die elektrische Polarisation der Feldstärke proportional gesetzt; das stimmt für statische und langsam veränderliche Felder, selbst noch für die Felder, mit denen die drahtlose Telegraphie arbeitet und die bereits mehr als eine Million Schwingungen pro Sekunde ausführen. Aber im Gebiet der viel schnelleren optischen Schwingungen haben wir die Tatsache der *Dispersion*: der von *Maxwell* als konstant angenommene Proportionalitätsfaktor, die Dielektrizitätskonstante, welche gleich dem Quadrat des Brechungsexponenten ist, erweist sich als abhängig von der Schwingungsfrequenz nach Gesetzen, welche aufs engste mit dem Atombau des brechenden Mediums zusammenhängen und nur von hier verstanden werden können (insbesondere gehen in die Dispersionsformel Ladung und Masse des Elektrons in solcher Weise ein, daß daraus ihr Verhältnis experimentell bestimmt werden kann).

Welches ist letzten Endes der Sinn der Theorienbildung? *H. Hertz* beschreibt in seinen Prinzipien der Mechanik (S. 1) das Verfahren dahin: „Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände." Unter dem Einfluß skeptischer Erkenntnistheorie war es eine Zeitlang im 19. Jahrhundert, namentlich in der englischen Physik, Mode geworden, nur Bilder, Analogien für beschränkte Tatsachengebiete zu suchen, mechanische Modelle zu konstruieren, die gewisse Züge der abzubildenden Erscheinung wiedergaben, die man aber als „Erklärung" unmöglich ernst nehmen konnte — da man vom „Wahn" befreit war, daß es gelte, eine in sich eindeutig bestimmte Wirklichkeit zu erkennen. Aber die Methode erwies sich als merkwürdig unfruchtbar, sobald man bewußt darauf ausging, nur Bilder und Modelle zu entwerfen. *Maxwell* erschienen die physikalischen Analogien als ein Ausweg, welcher die Nachteile einer rein mathematisch gefaßten Theorie (die nur schwer die erfahrungswichtigen Folgerungen überblicken läßt) und einer eigentlichen physikalischen Hypothese (welche leicht blind macht gegen die Tatsachen) zugleich vermeidet.

„Unter einer physikalischen Analogie", heißt es bei ihm, „verstehe ich jene teilweise Ähnlichkeit zwischen den Gesetzen eines Erscheinungsgebietes mit denen eines andern, welche bewirkt, daß jedes das andere illustriert." Er erwähnt die Analogie zwischen der Gravitation und dem stationären Wärmezustande eines Mediums — eine Analogie, die darauf beruht, daß für beide Vorgänge die *Laplace*sche Potentialgleichung gilt — und stellt ihr die Analogie zwischen dem Licht und den Schwingungen eines elastischen Mediums entgegen. Die letztere „erstreckt sich viel weiter, aber obwohl ihre Wichtigkeit und Fruchtbarkeit nicht hoch genug geschätzt werden kann, so müssen wir doch dessen eingedenk bleiben, daß sie nur auf einer formalen Ähnlichkeit zwischen den Gesetzen der Lichterscheinungen und denen der elastischen Schwingungen beruht. Wenn wir sie ihres physikalischen Gewandes entkleiden, so reduziert sie sich auf eine Theorie transversaler Zustandsänderungen, und es bleibt ein System von Wahrheiten übrig, welches zwar den beobachteten Tatsachen nichts Hypothetisches hinzufügt, aber dafür wahrscheinlich sowohl an Anschaulichkeit als auch an Fruchtbarkeit in der Anwendung zurücksteht" (*Maxwell*, Scient. Pap. I, S. 156). Das Beispiel ist, namentlich im Hinblick auf die von *Maxwell* ausgehende weitere Entwicklung der Lichttheorie, sehr geeignet, den Vorteil dieser Auffassung, den Schutz vor Dogmen, den sie gewährt, deutlich zu machen.

Mach spricht von einer fortschreitenden „Anpassung der Gedanken an die Tatsachen". Die Rechtfertigung für die Bildung von Theorien erblickt er in der durch sie herbeigeführten *Ökonomie* des Auffassens und Mitteilens von Tatbeständen und Verfahrensweisen (vgl. Mechanik, Einleitung). Andere bewahrten sich den Glauben, daß hier die Vernunft nach immanenten Prinzipien am Werke ist, ihr Korrelat, *die transzendente Wirklichkeit*, symbolisch aufzubauen und darzustellen; ohne diesen Glauben ist ihnen Wissenschaft ein toter Kram. Alle aber sind über das Endziel einig: es gilt, die *Ereignisse vorauszusagen*. Und inwiefern garantieren die ökonomischen oder Vernunftprinzipien, nach denen eine Theorie zustande kommt, dafür, daß die von ihr gelieferten Voraussagen sich erfüllen? Das ist eine letzte Tatsache, die über das Erkennen hinausweist — *Humes* Problem: das *Vertrauen* in die Induktion kann, wenn es begründet werden soll, nur begründet werden durch das Induktionsprinzip selbst. Aber *Weltvertrauen* und *Selbstvertrauen* ist die natürliche, keiner „Rechtfertigung" bedürftige Grundhaltung alles, auch und zu allermeist des in thetischen Vernunftakten sich auswirkenden geistigen Lebens.

Kant hat in seiner transzendentalen Logik den Versuch unternommen, nach einem systematischen Verfahren die apriorischen Prinzipien für den Aufbau der Erfahrungswirklichkeit zu ermitteln. Sein Werk hat das Verdienst, jenen Begriff der Wirklichkeit, welcher seit *Galilei* die Naturforschung beherrschte, ins philosophische Bewußtsein gehoben, von dem metaphysischen Ballast, mit dem ihn noch das *Leibniz*sche System belastete, befreit und gegen den aus der Naturforschung emporgewachsenen Sensualismus *Hume*scher Prägung gesichert zu haben. Der Naturwissenschaftler wird aber seinen Versuch dennoch schwerlich als befriedigend anerkennen können; was *Kant* anführt, ist bei weitem nicht ausreichend und zu sehr gebunden an die besondere Form der zeitgenössischen Physik, anderseits enthält es überflüssige Bestandteile, die nur durch den logischen Schematismus des „großen Chinesen von Königsberg“[1]) hineingeraten sind. Als der eigentliche brauchbare Kern schälen sich die Ideen der *Substanz* und der *Kausalität* heraus, denen der letzte Abschnitt dieses Artikels gewidmet ist. Neben den beiden auf sie bezüglichen „Analogien der Erfahrung“ stellt *Kant* noch eine dritte, von der Wechselwirkung handelnde auf; vorausgehen die „Axiome der Anschauung“, als deren Prinzip er ausspricht: Alle Anschauungen sind extensive Größen, und die „Antizipationen der Wahrnehmung“ vermöge des Grundsatzes: In allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Größe. Er läßt den drei ersten Gruppen als letzte die „Postulate des empirischen Denkens überhaupt“ folgen, welche sich auf die Begriffe der Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit beziehen. Das Kantische Problem, zu dessen Beantwortung hier einige Bruchstücke gesammelt wurden, bleibt für die Zukunft offen — wie ich vermuten möchte, als eine unendliche Aufgabe. *Kant* freilich betrachtete gerade die Metaphysik, sofern sie auf die Lösung dieses Problems ausgeht, als „die einzige aller Wissenschaften, die sich eine solche Vollendung, und zwar in kurzer Zeit und mit nur weniger, aber vereinigter Bemühung versprechen darf, so daß nichts für die Nachkommenschaft übrigbleibt...“ (Kritik der reinen Vernunft, 1. Aufl., Vorrede, S. XX).

---

[1]) Nietzsches Spitzname für Kant (s. „Jenseits von Gut und Böse“, 6. Hauptstück, Aphor. 210).

LITERATUR

P. Duhem, La Théorie Physique, son objet et sa structure. Paris 1906.

E. Mach, Erkenntnis und Irrtum. 1905.

H. Poincaré, La science et l'hypothèse.

E. Cassirer, Substanzbegriff und Funktionsbegriff. 1910.

—, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. 1921.

B. Russell, Our Knowledge of the External World.

A. S. Eddington, The Nature of the Physical World. Cambridge 1929.

J. Jeans, The New Background of Science. Cambridge 1933.

P. W. Bridgman, The Nature of Physical Theory. Princeton 1936.

K. Popper, Logik der Forschung. Wien 1935.